Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии
наименование кафедры

Многообразия с краем

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Былинкиной Ксении Евгеньевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Ю.В.Шевцова
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

профессор, д. ф.-м.н.		В.В.Розен
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Изучать и исследовать многообразия начали во второй половине 19 века. Они возникли при изучении теории групп Ли и дифференциальной геометрии, а также используются в приложениях математики — механике, математической физике и других науках. Однако первые, более точные определения и понятия были введены только в 30-х годах 20 века. Одним из основных, базовых понятий современной математики является гладкое многообразие. Чаще всего рассматривают именно их, то есть те многообразия, на которых выделяется класс гладких функций. Именно в рамках гладких многообразий можно говорить о касательных векторах и касательных пространствах. С помощью гладкой структуры работать с многообразиями гораздо проще и удобнее.

Цель данной работы заключается в изучении многообразий с краем.

Для этого необходимо выполнить следующие задачи:

1. ввести определение гладкого многообразия, а также связаные с ним понятия;
2. ввести понятие многообразия с краем, определить интеграл от дифференциальной формы по многообразию и посмотреть как связаны интеграл по многообразию и интеграл по границе того же многообразия;
3. решить практическое задание, касающееся данной темы, с помощью пакета Wolfram Mathematica.

Вся работа состоит из введения; раздела с вводными понятиями и определениями; основной части, которая делится на главы; заключения; приложения и списка использованных источников.

В разделе «Вводные понятия и определения» сформулированы все необходимые понятия, которые в дальнейшем будут использованы в работе.

Основная часть делится на 4 главы. В 1-ой главе рассматриваются гладкие многообразия (основное определение, подмногообразие, гладкие функции, разбиение единицы и теорема о его существовании, произведение гладких многообразий; определения касательного вектора и касательного пространства с введёнными на нём операциями сложения касательных векторов и умножения их на число, а также теорема о базисе касательного пространства; понятие гладкого отображения и его ранга, диффеоморфизма, касательного отображения (дифференциала) и его свойств, внешней дифференциальной формы). Во 2-ой главе рассматриваются многообразия с краем (основное определение многообразия с краем, определение самого края; понятие ориентируемого, связного многообразия, теорема об ориентации связного многообразия и о крае ориентируемого многообразия, определим интеграл от дифференциальной формы и рассмотрим связь интеграла по многообразию и интеграла по границе того же многообразия). В 3-ей главе вводятся понятия дифференцируемой структуры и дифференцируемого многообразия, интегрального многообразия, вполне интегрируемой дифференциальной системы, алгебры Ли и скобки Ли векторных полей; доказывается локальная теорема Фробениуса. В 4-ой главе представлено решение практической задачи на основе данной работы с использованием пакета Wolfram Mathematica.

«Приложение 1» содержит рисунки, которые используются в работе; «Приложение 2» содержит программный код в Wolfram Mathematica для решения практической задачи.

Список использованных источников состоит из 20 наименований.

Основное содержание работы. Пусть $\mathcal{M}$— n-мерное топологическое многообразие, $\mathfrak{A}$ — атлас $\mathcal{M}$. (U, x) и (V, y) — две произвольные карты в выбранном атласе.

Координатное преобразование

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

называется гладким, если соответствующие функции перехода

$$y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n)$$

имеют непрерывные частные производные всех порядков в открытой области $x(U \cap V)$ (бесконечно дифференцируемые, принадлежащие классу C^∞) и Якобиан $det \left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) \neq 0$.

Гладкое многообразие — это топологическое многообразие, у которого все координатные преобразования являются гладкими.

Функция $f : \mathcal{M} \to R$ (каждой точке $p \in \mathcal{M}$ ставится в соответствие число $u = f(p)$), функция $f(p)$ (область определения — открытая карта $x(U)$ координатного пространства R^n, при этом $p \in U$) задаётся следующим образом: $\phi(x^1, \ldots, x^n) = (f \circ x^{-1})(x^1, \ldots, x^n)$.

Определение 6. *Функция f, заданная на гладком многообразии $\mathcal{M}$, называется гладкой, если $\forall p \in \mathcal{M}\ \exists (U, x) :\ p \in U, \phi = f \circ x^{-1}$ имеет в открытом множестве $x(U)$ пространства R^n непрерывные частные производные всех порядков.*

Множество всех гладких функций на многообразии $\mathcal{M}$ обозначается: $C^\infty(\mathcal{M})$.

Гладкое многообразие локально устроено как Евклидово пространство. На нём можно производить все построения локально, но однако возникает потребность распространить результат до некоторого глобального объекта. Разбиение единицы служит основным средством такой глобализации.

Носителем функции f, заданной на многообразии $\mathcal{M}$, называется замыкание точек $p \in \mathcal{M}$, где $f(p) \neq 0$. Обозначение: *supp* f.

Определение 7. *Система гладких функций $\phi_i : \mathcal{M} \to R$ называется разбиением единицы (или гладким разбиением единицы), подчинённым покрытию $\{U_i\}$, если она обладает следующими свойствами:*

1. $0 \leqslant \phi_i \leqslant 1 \quad \forall i, \quad \forall p \in \mathcal{M}$,
2. *supp* $\phi_i \subset U_i \ \ \forall i$,
3. $\Sigma_i \phi_i(p) = 1$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — гладкое многообразие и $\mathfrak{A} = \{(U_i, x_i)\}$ — атлас на многообразии. Тогда существует гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_i\}$.*

Для того, чтобы построить касательный вектор в точках гладкого многообразия необходимо использовать связь между вектором, заданным в точке координатного пространства R^n и операцией вычисления производной по направлению от заданной в этом пространстве функции(то есть градиента функции).

Пусть ξ_p — вектор координатного пространства R^n, заданный в точке p. Тогда определим производную по направлению, задаваемому вектором ξ_p, для любой гладкой функции f, заданной в окрестности точки p:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_p = (grad\ f, \xi)_p.$$

Определим операцию по заданному вектору на множестве $C^\infty(p)$ гладких функций в окрестности точки p:

$$\xi_p : C^\infty(p) \to R,$$

проводимую по правилу

$$\xi_p : f(p) \mapsto \xi_p f.$$

Касательным вектором в точке p многообразия $\mathcal{M}$ называется правило $X_p : C^\infty(p) \to R$, которое каждой функции $f \in C^\infty(p)$ ставит в соответствие число $X_p f$ и обладает следующими свойствами:

1. $X_p(f+g) = X_p f + X_p g, \quad (f, g \in C^\infty(p))$
2. $X_p(\alpha f) = \alpha X_p f, \quad (\alpha \in R)$
3. $X_p(f \cdot g) = X_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p g.$

Пусть $T_p\mathcal{M}$ — множество всех касательных векторов в точке p гладкого многообразия $\mathcal{M}$. Этому множеству принадлежит нулевой вектор O_p — нулевое отображение $O_p : f \to 0$.

Операции сложения касательных векторов $X_p + Y_p$ и умножения касательного вектора на число αX_p определены на множестве $T_p\mathcal{M}$. Сумма касательных векторов и произведение касательного вектора на число α также являются касательными векторами.

Таким образом множество $T_p\mathcal{M}$ будет являться вещественным линейным пространством, которое называется касательным пространством гладкого многообразия $\mathcal{M}$ в точке p.

Теорема 2. *Векторы* $\partial_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \partial_n = \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ *образуют базис касательного пространства* $T_p\mathcal{M}$.

В качестве следствия из данной теоремы заключаем, что $dim T_p\mathcal{M} = dim\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гладкие многообразия; $dim\mathcal{M} = n, dim\mathcal{N} = k$.

Определение 8. *Отображение*

$$f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

называется гладким в точке p многообразия $\mathcal{M}$, если существуют локальные карты $(U, x), p \in U; (V, y), q = f(p) \in V$, такие, что отображение

$$g = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to R^k, \quad x(U) \subset R^n.$$

является гладким (бесконечно дифференцируемым).

Определение 9. *Отображение f называется гладким, если оно гладкое в каждой точке p многообразия $\mathcal{M}$.*

Определение 10. *Гладкое отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ также является гладким.*

Определение 11. *Многообразие $\mathcal{M}$ называется диффеоморфным $\mathcal{N}$ $(\mathcal{M} \cong \mathcal{N})$, если существует диффеоморфизм $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.*

Диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

Рассмотрим касательные пространства $T_p\mathcal{M}$ и $T_q\mathcal{N}$ гладких многообразий $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. Поставим каждому касательному вектору $X_p \in T_p\mathcal{M}$ в соответствие касательный вектор $Y_q \in T_q\mathcal{N}$ по следующему правилу:

$$Y_q(g) = X_p(g \circ f),$$

g — произвольная гладкая функция.

Y_q является касательным вектором из $T_q\mathcal{N}$.

Таким образом построено отображение одного касательного пространства в другое:

$$(df)_p = f_{*p} : T_p\mathcal{M} \to T_q\mathcal{N},$$

$$f_{*p} : X_p \to Y_q.$$

Это отображение называется дифференциалом отображения или касательным отображением.

Определение 12. *Рангом гладкого отображения $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ в точке $p \in \mathcal{M}$ называется размерность образа касательного пространства $T_p\mathcal{M}$ при касательном отображении f_{*p}:*

$$rang_p f = dim f_{*p}(T_p\mathcal{M}).$$

Размерность образа линейного пространства при линейном отображении равна рангу матрицы этого отображения. Таким образом:

$$rang_p f = rang\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{x(p)}.$$

Пусть $z = f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$ — гладкая функция в R^n, $x_0 \in R^n$, Пусть задан вектор $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$.

Тогда $df_{x_0}(\xi) = \dfrac{\partial f}{\partial x^1}(x_0\xi^1) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x^n}(x_0\xi^n)$.

Координаты точки $x \in R^n$ будем рассматривать как гладкие функции. Следовательно, в каждой точке R^n определены дифференциалы $dx^1, \dots, dx^n$ этих функций. Таким образом $dx^1, \dots, dx^n$ — линейные формы, любая их комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^i dx^i$ будет являться линейной формой.

Обозначим Ω — линейное пространство линейных форм.

Определим внешнее произведение форм $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_k}$ следующим образом:

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

Внешней дифференциальной k-формой ω называется выражение вида

$$\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

где $(\omega_{i_1 \dots i_k})$ — кососимметричное тензорное поле типа $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$.

Определение 13. *Внешним дифференциалом от внешней дифференциальной k-формы ω называется внешняя $(k+1)$-форма $d\omega$, определяемая по* *правилу*

$$d\omega(x) = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i}(x) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

$\mathcal{M}$ — гладкое многообразие.

Определение 14. *Карты* (U, x) *и* (V, y) *называются согласованными, если якобиан координатного преобразования*

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

положителен, то есть $det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) > 0$.

Атлас многообразия называется ориентированным, если любые две его карты согласованы.

Многообразие называется ориентируемым, если у него есть ориентируемый атлас.

Для определения многообразия с краем достаточно в определении обычного многообразия заменить координатное пространство R^n замкнутым полупространством $R_n^+ = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in R \mid x^n \geqslant 0\}$.

Пусть $f(x) \in C^\infty(M)$ — гладкая функция на многообразии M. Тогда замкнутое множество $A \subset M$, выделяемое в многообразии M неравенством $f(x) \leqslant 0$ (или $f(x) \geqslant 0$) называется многообразием с краем. Подмногообразие $\partial A \subset M$, задаваемое уравнением $f(x) = 0$, называется краем A. Мы предполагаем, что градиент функции f на крае ∂A отличен от нуля. Если функция $f > 0$ на M, то край пустой, $\partial A = \emptyset$, и $A = M$. Нетривиальное многообразие с краем получается, если область значений функции f включает нуль.

Гладкая структура на многообразии с краем определяется аналогично, как и на обычном многообразии.

Теорема 3. *Край* $\partial\mathcal{M}$ *ориентируемого многообразия* $\mathcal{M}$ *также является ориентируемым многообразием.*

Определим интеграл от дифференциальной формы ϕ по многообразию $\mathcal{M}$.

Пусть носитель формы ϕ содержится в области определения U локальной карты (U, x). Тогда в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ форма ϕ выглядит следующим образом:

$$\phi = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

По определению

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \phi = \int \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Это определение не зависит от выбора локальной карты.

В более общем случае получаем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \phi = \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\sum_{\alpha} \psi_\alpha \right) \phi = \sum_{\alpha} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \phi,$$

$\psi_\alpha \equiv 0$ вне U_α, $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ — ориентированный атлас многообразия, ψ_α — разбиение единицы.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M}$ — ориентированное многообразие с краем $\partial\mathcal{M}$, $dim\mathcal{M} = n$; ϕ — внешняя дифференциальная форма $(n-1)$-степени с компактным носителем. Тогда справедлива фомула:*

$$\int\limits_{\partial\mathcal{M}} \phi = (-1)^n \int\limits_{\mathcal{M}} d\phi.$$

*П*усть $\mathcal{M}$ — ориентированное многообразие с краем $\partial\mathcal{M}$, $dim\mathcal{M} = n$; ϕ — внешняя дифференциальная форма $(n-1)$-степени с компактным носителем. Тогда справедлива фомула: Данная формула связывает интеграл по многообразию и интеграл по границе данного многообразия.

Определение 20. *Многообразие $\mathcal{M}$ вместе с дифференцируемой структурой называется дифференцируемым многообразием.*

Пусть $\mathcal{D}$ — дифференциальная система на многообразии $\mathcal{M}$, $dim\ \mathcal{D} = p$.

Определение 21. *Подмногообразие $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ называется интегральным многообразием системы $\mathcal{D}$, если выполняется условие:*

$$i_*(T_x\mathcal{N}) \subset \mathcal{D}[i(x)]$$

($\forall x \in \mathcal{N}$, где i— вложение $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$ (то есть ограничение на $\mathcal{N}$ тождественного отображения $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$)).

Определение 22. *Дифференциальная система $\mathcal{D}$ размерности p называется вполне интегрируемой, если в окрестности каждой точки $x \in \mathcal{M}$ существует карта (U, h), где $h = (x^1, \ldots, x^n)$ такая, что все многообразия из U, заданые уравнениями вида*

$$x^{p+1} = const, x^{p+2} = const, \ldots, x^n = const,$$

являются интегральными многообразиями системы $\mathcal{D}$.

Теорема 5 (Локальная теорема Фробениуса). *Пусть $\mathcal{D}$ — дифференциальная система размерности p на n-мерном многообразии $\mathcal{M}$. Система $\mathcal{D}$ вполне интегрируема тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ — алгебра Ли, то есть $[X, Y] \in \mathcal{V}(\mathcal{D})$, если $X, Y \in \mathcal{V}(\mathcal{D})$.*

Если $X_1, \ldots, X_p$ порождают $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ на U, то система $\mathcal{D}$ вполне интегрируема тогда и только тогда, когда $\exists C^i_{jk} \in U$, что

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{p} C^i_{jk} X_i.$$

Заключение. В данной работе выполнены поставленные цель и задачи. Мы рассмотрели понятие гладких многообразий, многообразий с краем, определили связь между интегралом по многообразию и интегралом по его границе, решили задачу по данной теме с помощью пакета Wolfram Mathematica.

Многообразия являются широким многомерным обобщением понятия поверхности, в частности, ее внутренней геометрии. Понятие многообразия играет большую роль в теории алгебраических функций и непрерывных групп.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Чирка, Е.М. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 1. Римановы поверхности. / Е.М. Чирка. М.: МИАН, 2006. 106 с.

2 Худенко, В.Н. Лекции по топологии / В.Н. Худенко, В.В. Махоркин. Калининград: Изд-во Калинингр. ун-та, 2000. 111 с.

3 Позняк, Э.Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В.Шикин. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.

4 Понтрягин, Л.С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий / Л.С. Понтрягин. М.: Едиториал УРСС, 2004. 176 с.

5 Катанаев, М.О. Геометрические методы в математической физике / М.О. Катанаев. М.: Матем. ин-т им. В.А.Стеклова РАН, 2008. 192 с.

6 Зорич, В.А. Математический анализ: Учебник. Ч. 2 / В.А. Зорич. М.: Наука, 1984. 640 с.

7 Гусев, Н.С. Производная Ли, теорема Фробениуса, дифференциальные формы / Н.С. Гусев, В.Л.Чернышев. М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2011. 65 с.

8 Кокарев, С.С. Элементы геометрии гладких многообразий: производные Ли и их приложения / С.С. Кокарев. Ярославль: РНОЦ Логос, 2008. 166 с.

9 Шамаев, Э.И. Конспект лекций по курсу «Топология» / Э.И. Шамаев. Якутск, 2009. 35 с.

10 Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр 3. Гладкие многообразия / М.М. Постников. М.: Наука, 1987. 480 с.

11 Многообразие [Электронный ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Многообразие (дата обращения: 28.03.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

12 Многообразия [Электронный ресурс] URL: http://e-lib.gasu.ru/eposobia/pjankova/R125.html (дата обращения: 28.03.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

13 Диффеоморфизм [Электронный ресурс] URL: http://lib.repetitors.eu/encmathematics/?dictid=1568 (дата обращения: 02.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

14 Многообразие [Электронный ресурс] URL: http://bse.sci-lib.com/article077287.html (дата обращения: 04.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

15 Топологическое пространство [Электронный ресурс] URL:http://ru.math.wikia.com/wiki/Топологическоепространство (дата обращения: 04.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

16 Многообразие [Электронный ресурс] URL: http://ru.math.wikia.com/wiki/Многообразие (дата обращения: 04.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

17 Касательный вектор и касательное пространство к многообразию [Электронный ресурс] URL: http://vikidalka.ru/2-200314.html (дата обращения: 07.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

18 Многообразие [Электронный ресурс] URL: http://www.diclib.com/s/cat0/bse/Многообразие.WPNgku-hqko (дата обращения: 07.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

19 Гладкое многообразие [Электронный ресурс] http://ubuntu-passion.ru/wina-hon29sis/Гладкоемногообразие (дата обращения: 07.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.

20 Лекции по дифференциальной геометрии. Л. А. Масальцев [Электронный ресурс] http://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/lektcii-po-differentcialnoi-geometrii-l-a-masaltcev (дата обращения: 22.04.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.