Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

наименование кафедры

Методы решения экстремальных задач

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Пяткина Максима Вячеславовича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Тимофеев В.Г.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н.		Прохоров Д.В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Неравенства, с помощью которых оцениваются нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка, играют важную роль во многих областях математики и ее приложений. Особенно важны неулучшаемые неравенства такого типа, то есть неравенства с наилучшей константой. Для функций одной переменной наиболее ярким результатом и поныне остается неравенство Колмогорова, которое он получил в 1939 г. В этой связи неравенства для промежуточных производных часто называют неравенствами типа Колмогорова. К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной.

Задача нахождения наилучшей константы в неравенстве типа Колмогорова в ряде случаев сводится к некоторой экстремальной задаче.

В теории экстремальных задач выделяется несколько достаточно ясно очерченных подклассов: вариационное исчисление, оптимальное управление, выпуклое программирование. В работе с достаточно общих позиций рассматриваются методы решения задач, принадлежащих лишь двум первым подклассам. На их основе найдены наилучшие константы для соответствующих неравенств типа Колмогорова.

Так, например, в первом разделе данной работы рассматривается один частный случай неравенства колмогоровского типа — неравенство Адамара. Задача нахождения наилучшей константы в данном неравенстве решается двумя способами. Первый способ заключается в сведении неравенства Адамара к неравенству в аддитивной форме и доказательстве его справедливости. Второй — в сведении неравенства к задаче вариационного исчисления и ее последующего решения.

Во втором разделе данной работы исследуются методы решения оптимальных задач. На их основе решается несколько различных задач оптимального управления.

В третьем разделе приводятся некоторые сведения о точном неравенстве колмогоровского типа. В основе его лежит теорема, которая устанавливает связь наилучшей константы с наименьшим собственным значением некоторой вспомогательной матрицы. Для доказательства теоремы приведены вспомогательные предложения. Применение данной теоремы позволяет получить оценку константы в неравенстве типа Колмогорова. Кроме того, в данном разделе изложен метод интегральных представлений, благодаря чему появляется возможность для изучения функциональных пространств функций, заданных на множестве достаточно общего вида.

Итак, основными целями работы являются:

1) получение точной константы в неравенстве Адамара;
2) изучение методов оптимального управления и вариационного исчисления, решение конкретных задач с их использованием;
3) получение более общих сведений о наилучшей константе, их применение.

Основное содержание работы. Пусть I либо полупрямая $\mathbb{R}_+$, либо вся прямая $\mathbb{R}$; $W^n_{pr}(I)$ – пространство всех функций $x \in L_p(I)$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(n-1)}$ на I и таких, что $x^{(n)} \in L_r(I)$; $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$. Рассмотрим следующее семейство экстремальных задач, определенных на $W^n_{pr}(I)$:

$$f_0(x) = \|x^{(k)}\|_{L_q(I)} \to sup,$$

$$f_1(x) = \|x\|_{L_p(I)} \leq 1,$$

$$f_2(x) = \|x^{(n)}\|_{L_r(I)} \leq 1 \qquad (1.1)$$

Задачу (1.1) будем называть общей задачей о неравенствах для производных. При некотором соотношении между k, n, p, q и r возможны неравенства вида:

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(I)} \leq K\|x\|^{\alpha}_{L_p(I)}\|x^{(n)}\|^{\beta}_{L_r(I)} \tag{1.2}$$

Неравенство (1.2) с наилучшей константой будем называть *точным*. Задачу о нахождении наилучшей константы в неравенстве (1.2) будем называть задачей о *неравенстве типа Колмогорова*. Решение этой задачи назовем *константой Колмогорова*.

Рассмотрим неравенство

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq K\|x\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}. \tag{1.5}$$

Посредством следующих двух теорем докажем, что константа Колмогорова $K = \sqrt{2}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $x \in L_2(\mathbb{R}_+)$, *производная* $\dot{x}$ *локально абсолютно непрерывна и* $\ddot{x} \in L_2(\mathbb{R}_+)$. *Тогда неравенства*

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{2}\|x\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)} \tag{1.6}$$

и

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \|x\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|\ddot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \tag{1.7}$$

эквивалентны.

Теорема 1.2. *Пусть* $x \in L_2(\mathbb{R}_+)$, *производная* $\dot{x}$ *локально абсолютно непрерывна и* $\ddot{x} \in L_2(\mathbb{R}_+)$. *Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \|x\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|\ddot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

Теорема 1.3. *Пусть* $x \in L_2(\mathbb{R})$, *производная* $\dot{x}$ *локально абсолютно* *непрерывна и* $\ddot{x} \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \cdot \|\ddot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \tag{1.13}$$

Основной изопериметрической задачей называется следующая экстремальная задача:

$$J_0(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n)}(t))dt \to extr; \tag{1.15}$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n)}(t))dt \leq 1, \quad i = 1, ..., m; \tag{1.16}$$

Исследуем теперь неравенство Адамара на полуоси как задачу вариационного исчисления. Задача о вычислении константы Колмогорова в неравенстве (1.5) равносильна нахождению точного значения следующей изопериметрической задачи:

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}^2(t)dt \to max, \int\limits_0^\infty \big[x^2(t) + \ddot{x}^2(t)\big]dt \leq 1 \tag{1.24}$$

Для решения этой задачи воспользуемся необходимым условием экстремума. В результате получим, что $x_0(t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{t}{2}}(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)$ - решение изопериметрической задачи (1.24), а, следовательно, и решение задачи о нахождении наилучшей константы в (1.5). Подстановка $x_0(t)$ в неравенство даст константу $\sqrt{2}$. Откуда можно сделать вывод, что константа $K = \sqrt{2}$ является наилучшей, а само неравенство точным.

Задачей оптимального управления называется следующая задача:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + g_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to sup \qquad (2.1)$$

$$\dot{x} = f(t, x(t)u(t)), u(t) \in U, \qquad (2.2)$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt \to sup; \quad |x + \ddot{x}| = u, \quad |u| \leq 1$$

Применяя к рассматриваемой системе принцип максимума Понтрягина, получаем, что при управлении $u = \pm 1$ оптимальные траектории на плоскости x_1, x_2 будут состоять из дуг окружностей с центром в $(1, 0)$ радиуса $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ при $u = 1$ и с центром в $(-1, 0)$ того же радиуса при $u = -1$.

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\int_{-1}^{1} |x|^s dt \to sup; \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leq 1$$

где $1 < s < \infty$.

Применим к рассматриваемой системе принцип максимума Понтрягина, получим, что x есть ломаная с угловыми коэффициентами ± 1. При этом функция x может иметь n равных отрезков постоянства значений производной. Следовательно оптимальная траектория x_0 есть ломаная с угловыми коэффициентами ± 1 и изломами в точках $-1 + \dfrac{2}{n}k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\int_0^T x^2(t)dt \to min; \quad x(0) = 1, \quad \ddot{x}(T) = 0, \quad \ddot{x} - u = 0, \quad |u| \leq 1$$

Применяя принцип максимум Понтрягина к данной задаче, получим следующую систему

$$\dot{x_2} = sgny, \quad \ddot{y} = -x_1, \quad y(0) = 0, \quad y(T) = 0. \tag{2.21}$$

Решением данной системы на отрезке $\big[0, T\big]$ будут следующие функции

$$\tilde{x_1}(t) = \frac{t^2}{2} - \alpha t + 1,$$
$$\tilde{y}(t) = -\frac{t^4}{24} + \frac{\alpha t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2\alpha}.$$

Заметим, что продолжая подобным образом эти функции на полупрямую $\mathbb{R}_+$, получим пару функций $\tilde{x_1}(t)$ и $\tilde{y}(t)$, которые удовлетворяют условиям (2.21) и которые финитны, так как точки склейки $\tilde{x_1}(t)$ (нули $\tilde{y}(t)$) сходятся к $T(1 - \sqrt{\dfrac{\alpha^2 - 2}{\alpha^2 + 2}})$. Таким образом, функция $\tilde{x_1}(t)$, является еще и решением аналогичной задачи с интегралом заданным на полуоси. Данная задача при такой постановке называется задачей Фуллера.

Далее будем рассматривать следующее точное неравенство

$$\|f^{(k)}\|^2 \le \frac{1}{\gamma_{n,k}}\{\|f\|^2 + \|f^{(n)}\|^2\},$$

Бесконечную в обе стороны последовательность действительных чисел $\big\{\omega_j\big\}_{j=-\infty}^{\infty}$ назовем гурвицевой порядка n, если $\omega_0 = \omega_n = 1, \omega_j = 0$ для $j \neq 0, 1, \dots, n$ и все корни многочлена

$$p(\lambda) = \omega_0 + \omega_1\lambda + \dots + \omega_n\lambda^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda^j \omega_j \tag{3.1}$$

имеют отрицательные действительные части.

Лемма 3.1. *Пусть заданы натуральные числа* n *и* k $(n = 2, \dots, \infty; k = 1, \dots, n-1)$. *Каково бы ни было действительно число* $\gamma \in G_{nk} = \Big(0, \dfrac{n}{k^{\frac{k}{n}}(n-k)^{\frac{n-k}{k}}}\Big)$, *существует одна и только одна гурвицева последовательность* $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ *порядка* n*, обладающая свойством:*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} \omega_{j-\nu}\omega_{j+\nu} = \begin{cases} 0, & \textit{для } j \neq 0, k, n, \\ 1, & \textit{для } j = 0, n, \\ -\gamma, & \textit{для } j = k. \end{cases}$$

Лемма 3.2. *Если* $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, $f(x)$ *абсолютно непрерывна вместе с* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ *и* $f^{(n)} \in L_2(\mathbb{R}_+)$*, то*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \cdots = \lim_{x\to\infty} f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Ниже нам придется иметь дело с конечными наборами чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$. Договоримся всякий раз считать этот набор продолженным нулями до бесконечной в обе стороны последовательности $\{\tilde{\omega}_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$.

По заданному набору чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ можно построить числа:

$$\Gamma_j = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} \omega_{j-\nu}\omega_{j+\nu}; \tag{3.5}$$

$$q_{js} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \omega_{j+\nu}\omega_{s-\nu-1} \quad \text{при} \quad 1 \leq s \leq j \leq n,$$

$$q_{js} = q_{sj} \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq s \leq n. \tag{3.6}$$

Из чисел q_{js} образуем симметричную матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11}q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21}q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Если задан вектор $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то через Q_a будем обозначать вектор $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, координаты которого задаются формулами $b_\nu = \sum\limits_{j=1}^{n} q_{\nu j} a_j \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$.

Лемма 3.3. *Если $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ абсолютно непрерывна вместе с производными до $(n-1)$-ого прорядка на всяком конечном отрезке полуоси $\mathbb{R}_+$ и $f^{(n)}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, то $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ и $f^{(n)} \in L_2(\mathbb{R}_+)$ и для любого набора действительных числе $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ имеет место равенство*

$$\int\limits_0^\infty \Big(\sum_{j=0}^{n} \omega_j f^{(j)}(t)\Big)^2 = \sum_{j=0}^{n} \Gamma_j \int\limits_0^\infty \big[f^j\big]^2 dt - (Qf_0, f_0), \tag{3.8}$$

где

$$f_0 = \big\{f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0)\big\}.$$

Положим при $n = 2, \dots, \infty$ и $k = 1, \dots, n-1$

$$\gamma_{nk} = \inf_{f \in L_2^{(n)}(\mathbb{R}_+)} \frac{\|f\|^2 + \|f^{(n)}\|^2}{\|f^{(k)}\|^2}, \quad \text{где } \|\varphi\| = \sqrt{\int\limits_0^\infty \varphi^2(t) dt}. \tag{3.15}$$

Лемма 3.4. *Справедливы неравенства*

$$0 < \gamma_{nk} < \frac{n}{k^{\frac{k}{n}} (n-k)^{\frac{n-k}{k}}}. \tag{3.16}$$

Из определения величины γ_{nk} для всякой функции $f(t) \in W^n_{22}(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\|f^{(k)}\| \leq \frac{1}{\gamma_{nk}}\big[\|f\|^2 + \|f^{(n)}\|^2\big],$$

причем константа $\dfrac{1}{\gamma_{nk}}$ в этом неравенстве не может быть уменьшена.

Укажем способ отыскания величин γ_{nk}. Пусть γ - произвольное число из интервала $G_{nk} = \Big(0, \dfrac{n}{k^{\frac{k}{n}}(n-k)^{\frac{n-k}{k}}}\Big)$. Обозначим через $\omega_j(\gamma)$ элементы гурвицевой последовательности порядка n $\big\{\omega_j\big\}_{j=-\infty}^{\infty}$, обладающей свойством (1). Существование этой последовательности гарантировано леммой 3.1. Положим далее

$$D(\gamma) = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.17}$$

где $q_{js}(\gamma) = q_{sj}(\gamma) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\omega_{j+\nu}(\gamma)\omega_{s-\nu-1}(\gamma)$ при $j \geq s$. **Теорема 3.1.** γ_{nk} *является наименьшим положительным корнем уравнения* $D(\gamma) = 0$.

Следствие 3.1. *При всех* $n = 2, \dots, \infty$ *и всех* $k = 1, \dots, n-1$ *справедливо равенство* $\gamma_{nk} = \gamma_{n,n-k}$.

Следствие 3.2.

Справедливы следующие утверждения:

а) $\gamma_{21} = 1$;

б) $\gamma_{31} = \gamma_{52} = (3 - 2\sqrt{2})^{1/3}$;

в) γ_{41} (а, следовательно, и γ_{43}) является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\gamma^8 - 6\gamma^4 - 8\gamma^2 + 1 = 0;$$

г) γ_{42} является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 - 4\gamma + 1 = 0.$$

С помощью следующей леммы становится возможным упрощение определителя $D(\gamma)$

Лемма 3.5. *Пусть* $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = \omega_1, \Delta_s = \begin{bmatrix} \omega_1\omega_0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_2\omega_1 & \omega_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_s\omega_{s-1} & \omega_{s-2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$, *при* $s = 2, \dots, \infty$ *и* $\Delta_s = 0$ *при* $s = -\infty, \dots, -1$. *Тогда*

$$\Delta_j = \omega_j + \gamma(-1)^k \Delta_{j-2k}, \quad \text{при } j = \overline{0, 2n-1}. \tag{3.20}$$

$$\Delta_j = \omega_j + \gamma(-1)^k \omega_{j-2k} + \gamma^2 \omega_{j-4k} + \dots, \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, 2n-1, \tag{3.21}$$

Таким образом, справедливо следующее соотношение

$$D(\gamma) = \begin{bmatrix} \Delta_{n-k+1}\Delta_{n-k+2} & \dots & \Delta_n \\ \Delta_{n-k+2}\Delta_{n-k+3} & \dots & \Delta_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_n\Delta_{n+1} & \dots & \Delta_{n+k+1} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Теорема 3.2. *Число* γ_{nk} *является наименьшим положительным решением уравнения*

$$D(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_{n-k+1}\tilde{\Delta}_{n-k+2} & \dots & \tilde{\Delta}_n \\ \tilde{\Delta}_{n-k+2}\tilde{\Delta}_{n-k+3} & \dots & \tilde{\Delta}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\Delta}_n \quad \tilde{\Delta}_{n+1} & \dots & \tilde{\Delta}_{n+k+1} \end{bmatrix} = 0,$$

где

$$\tilde{\Delta}_{n-j} = \sum_{\nu=1}^{2k} \varepsilon_\nu^{-j} \exp\big[\frac{n}{i\varepsilon_\nu \pi k}\int\limits_0^\gamma \eta^{\frac{1}{2k}-1}\Psi_\nu(\eta)d\eta\big],$$

$$\Psi_\nu(\eta) = \int\limits_0^\infty \frac{1-s^{2k}\eta}{(s^2\eta^{\frac{1}{k}} - \bar{\varepsilon}_\nu^2)(s^{2n} - \eta s^{2k} + 1)}ds,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2k}$ — *корни степени* $2k$ *из* $+1$.

Заключение. В данной работе были рассмотрены неравенства типа Колмогорова и изучены методы нахождения наилучшей константы в нем. Было показано, что при некоторых условиях задача о нахождении наилучшей константы может быть сведена к соответствующей экстремальной задаче. Для исследования такого рода задач потребовалось привести методы их решения. Были введены некоторые теоретические сведения из классического вариационного исчисления и оптимального управления. Благодаря этому удалось найти наилучшую константу в неравенстве Адамара и решить несколько задач оптимального управления. Кроме того, была доказана теорема, устанавливающая связь наилучшей константы с наименьшим собственным значением некоторой вспомогательной матрицы, и изложен метод интегральных представлений. Таким образом, поставленные цели были выполнены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тихомиров, В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.

2 Купцов, Н.П. Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ / Н.П. Купцов // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 94-117.

3 Харди, Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж . Е . Литтльвуд, Г. Полиа. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

4 Магарил-Ильяев, Г. Г. О неравенствах для производных колмогоровского типа / Г.Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров // Матем. сб. 1997 Т. 188, № 12. С. 73–106

5 Магарил-Ильяев, Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, 2-е изд., исправл. М.: Едиториал УРСС, 2003. 176 с.

6 Лаврентьев, М.А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. М. Л.: ОНТИ, 1938. 192 с.

7 Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. М.: Наука, 1969. 408 с.

8 Алексеев, В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 432 с.