Введение. Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих действительных переменных сложилась как новое направление математики в 30-е годы в результате работ С. Л. Соболева. Данная теория направлена на изучение важных связей и соотношений дифференциальных свойств функций в различных метриках, имеет также множество существеных применений в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Целями данной работы являются рассмотрение основных понятий об анизотропных пространствах С. Л. Соболева и рассмотрение вывода теорем вложения. А также наглядное представление соответствия области условию l-рога, которе представим с помощью кода, написанного в программе Wolfram Mathematica.

В первой главе введём в рассмотрение пространства L_p, а также основные интегральные неравенства, с которыми будем работать. Также приведём некоторые важные утверждения в виде лемм и теорем, на которые в дальнейшем будем ссылаться. Вторая глава посвящена обобщённым производным по С. Л. Соболеву. В ней будут сформулированы основные понятия, касающиеся производной в смысле С. Л. Соболева и её свойства. В третьей главе получим интегральное представление дифференцируемых функций через производные, а также введём понятие об области определения функций с условиями l-рога. В четвёртой главе подробно рассмотрим значение сильного(слабого) условий l-рога и приведём примеры. Основываясь на введённых в первых четырёх главах понятиях и утверждениях, изложим в пятой главе основную теорию об анизотропных пространствах С. Л. Соболева W_p^l. Наконец, шестая глава является итогом выше изложенной теории, в ней вложение пространства $D^\alpha(W_l)^p$ в пространсво L_p

Основное содержание работы. Сформулируем основные свойства пространств $L_p(G)$ вещественных функций $f(x)$, определённых на измеримом, не обязательно ограниченном множестве $G \subset E^n$, где E^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n)$. Измеримость этих множеств понимается в смысле Лебега.

Определение 1.1. Пусть p – вещественное число, $1 \leq p < \infty$. Обозначим через $L_p(G)$ – пространство измеримых на G функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^p$ интегрируема в смысле Лебега на G.

Число

$$\|f\|_{L_p(G)} = \|f\|_{p,\,G} = \left(\int\limits_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

называется нормой элемента $f \in L_p(G)$.

Теорема 1.1. Пространство $L_p(G)$ является полным, то есть если $f_k \in L_p(G) \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad \|f_k - f_l\|_{p,\,G} \to 0 \quad (k, l \to \infty)$, то существует функция $f \in L_p(G)$ такая, что $\|f_k - f\|_{p,\,G} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Определение 1.5. Функция $f \in L_p(G)$ называется *непрерывной (в целом)* в $L_p(G)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\|f(\cdot + y) - f\|_{p,E^n} < \varepsilon,$$

как только $|y| < \delta$, где $|y| = \left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$.

Теорема 1.2. *Всякая функция* $f \in L_p(G), \quad 1 \le p < \infty$, *непрерывна в целом в* $L_p(G)$.

Определение 1.8. Множество S пространства $L_p(G)$ называется *плотным* в $L_p(G)$, если для каждого $f \in L_p(G)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $\varphi_\varepsilon \in S$ такой, что

$$\|\varphi_\varepsilon - f\|_{p,G} < \varepsilon.$$

Теорема 1.3. *Если* $1 \le p < \infty$, *то множество* $C_0^\infty(G)$ *плотно в* $L_p(G)$, *следовательно, для каждой функции* $f \in L_p(G) \quad (1 \le p < \infty)$ *существует последовательность функций* $\varphi_k \in C_0^\infty(G)$, *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - f\|_{p,\,G} = 0.$$

Определение 1.10. Пусть G – открытое множество в E^n. Если функция $f(x)$, заданная на G, $f \in L_p(F)$ на любом компакте $F \subset G$, то будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $L_p^{\mathrm{loc}}(G)$. Если $p = 1 = (1, \ldots, 1)$, то будем обозначать такой класс $L^{\mathrm{loc}}(G)$.

Приведем основные интегральные неравенства.

1. Неравенство Гёльдера для векторных $p = (p_1, \dots, p_n)$

$$\int\limits_{E^n} |f_1(x) f_2(x)|\, dx \le \|f_1\|_p \|f_2\|_{p'}\,,$$

где $1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

2. Неравенство Минковского для векторных $p = (p_1, \dots, p_n)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} f_i \right\|_p \le \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_p\,,$$

где $1 \le p \le \infty, \quad f_i \in L_p(E^n) \quad (i = 1, \dots, m).$

Обобщенное неравенство Минковского для векторного $p = (p_1, \dots p_n)$, $1 \le p \le \infty$

Пусть $\varphi(x, y)$ – измеримая функция, заданная на $E_x \times E_y$, то справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_{E_y} \varphi(\cdot, y) dy \right\|_{p,\, E_x} \le \int\limits_{E_y} \|\varphi(\cdot, y)\|_{p,\, E_x} dy. \tag{1.2}$$

3. Неравенство Юнга для векторного p**.** Пусть $p = (p_1, \dots p_n)$, $q = (q_1, \dots q_n)$, $r = (r_1, \dots r_n)$,

$$1 \le p \le q \le \infty, \quad 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

$$J(x) = \int\limits_{E^n} f(y) K(y - x) dy.$$

Тогда

$$\|J\|_q \le \|K\|_r \|f\|_p \tag{1.5}$$

Далее рассмотрим процесс приближения функций средними, приведём понятие и сформулируем некоторые свойства обобщённой производной по С. Л. Соболеву.

Будем рассматривать функцию $K(x)$ – бесконечно дифференцируюмую, финитную в E^n ($K \in C_0^\infty$), которая удовлетворяет условию

$$\int\limits_{E^n} K(x)dx = 1.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad v > 0$

Построим для $K(x)$ среднюю функцию, которая будет бесконечно дифференцируемой на E^n, следующим образом:

$$K_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} K(x : v^\lambda).$$

Носителем этой функции является множество

$$S_{v^\lambda}(K) = \left\{ x : (x : v^\lambda) \in S(K) \right\}, \quad S_{v^\lambda}(K) \subset I_{v^\lambda}.$$

Пусть G – измеримое множество пространства E^n, f – функция, определенная на G. Положим $f = 0$ на $E^n \setminus G$ и предположим, что $f \in L^{\mathrm{loc}}(E^n)$.

Определим для нее среднюю функцию с ядром усреднения K и параметром v^λ усреднения по формуле

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int\limits_{E^n} f(x+y) K(y : v^\lambda) dy = v^{-|\lambda|} \int\limits_{E^n} f(y)(K((y-x) : v^\lambda) dy.$$

Эта функция непрерывна, имеет непрерывные производные любого порядка на E^n и для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($\alpha_i \geq 0$ – целые)

$$D_x^\alpha f_{v^\lambda}(x) = (-1)^{|\alpha|} v^{-|\lambda| - (\alpha, \lambda)} \int\limits_{E^n} f(y) D^\alpha K((y-x) : v^\lambda) dy,$$

где $D_\alpha^x = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Приведём далее важные утверждения в виде лемм.

Лемма 2.1 *Если* $f \in L_p(G) \quad (p = (p_1, \ldots, p_n))$, *то*

$$\|f_{v^\lambda}\|_p \leq \|K\|_1 \|f\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

$$\lim_{v\to 0}\|f_{v^\lambda}-f\|_p=0,\quad (1\le p<\infty).$$

Замечание 2.1. *Если* $f\in L_p^{\mathrm{loc}},\quad 1\le p<\infty$, *то* $f_{v^\lambda}\to f$ *в смысле* $L_p^{\mathrm{loc}}(G)$.

Лемма 2.2. *Если* G *– открытое множество пространства* $E^n,\quad f\in L_p^{\mathrm{loc}}(G),\quad p\ge 1$, *то*

$$\lim_{v\to 0}f_{v^\lambda}(x)=f(x)$$

для почти всех $x\in G$.

Замечание 2.2. *Если* f *непрерывна на* G, *то при* $v\to 0\quad f_{v^\lambda}(x)\to f(x)$ *в каждой точке* $x\in G$.

Определение 2.1. Пусть функции f и g локально суммируемы на открытом множестве $G\subset E^n$. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции в G функции φ выполняется равенство

$$\int_G g(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|k|}\int_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx,$$

где $k=(k_1,\ldots,k_n)$ ($k_i\ge 0$ – целые), то g называется *обобщённой производной* функции f вида $f^{(k)}=D^kf=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ в G.

Лемма 2.3. Пусть в области G заданы функция $f\in L_p^{\mathrm{loc}}(G)$, последовательность функций $f_j\in L_p^{\mathrm{loc}}(G)$ ($j=1,\ldots$), имеющих обобщённые производные $f_j^{(k)}\in L_p^{\mathrm{loc}}(G)$ ($j=1,\ldots$), где $1\le p\le\infty$, $1\le q\le\infty$.

Если $f_j\to f$ ($j\to\infty$) в смысле $L_p^{\mathrm{loc}}(G)$ и $(f_j^{(k)}-f_i^{(k)})\to 0$ ($i,j\to\infty$) в смысле $L_q^{\mathrm{loc}}(G)$, то функция f имеет на G обобщённую производную $f^{(k)}\in L_q^{\mathrm{loc}}(G)$ и $f_j^{(k)}\to f^{(k)}$ ($j\to\infty$) в смысле $L_q^{\mathrm{loc}}(G)$.

Приведём вывод интегральных представлений функций через производные. Данный вывод основан на следующей идее.

Пусть дана локально суммируемая функция f. Построим для неё среднюю функцию $f_{v^\lambda}=f(x,v)$ с некоторым ядром K' и параметром усреднения v^λ, где λ – фиксированный вектор. Такую функцию можно рассматривать как функцию параметра v, непрерывно дифференцируемую по v при $v>0$.

Полученное интегральное представление имеет вид:

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int\limits_0^h \sum_{i=1}^n v^{-1-|\lambda|+l_i\lambda_i} dv \int\limits_{E^n} D_i^{l_i} f(x+y) \mathcal{L}_i(y : v^\lambda) dy, \qquad (3.11)$$

справедливое для почти каждого x из того множества, для которого имеет смысл правая часть формулы (3.11).

Рассмотрим подробнее, каков смысл представления (3.11). Фактическое интегрирование правой части этой формулы проводится по точкам $y \in S(K,\ \lambda,\ h)$, где

$$S(K,\ \lambda,\ h) = \bigcup_{0<v\leq h} S_{v^\lambda}(K)$$

– теоретико-множественная сумма множеств $S_{v^\lambda}(K)$ вида

$$S_{v^\lambda}(K) = \{x : (x : v^\lambda) \in S(K)\}.$$

Это справедливо, так как $\operatorname{supp} \mathcal{L}_i \subset S(K)$. Следовательно, в правой части (3.11) используются значения функции f и ее производных в точках множества $x + S(K, \lambda, h)$, которое назовём носителем представления (3.11).

Пусть G – область задания функции f. Положим

$$U = \{x : x \in G, x + S(K, \lambda, h) \subset G\}.$$

Тогда правая часть (3.11) имеет смысл для всех x из множества U. Так как предполагаем, что $f \in L^{\mathrm{loc}}(G)$, то в силу леммы 2.2 в случае $p = 1$, можно утверждать, что при $\varepsilon \to 0 \quad f_{\varepsilon^\lambda}(x) \to f(x)$ почти везде на G, а следовательно, почти везде на U. Это означает, что тождество (3.11), которое получили из (3.10) устремлением $\varepsilon \to 0$ справедливо для почти всех точек x множества U.

Пусть $b > 0, \quad a_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$,

$$S(K) \subset \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, 1 < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{1/\lambda_i} < 1 + b \quad (i = 1, \ldots, n) \right\}.$$

Тогда

$$S(K,\lambda,h) \equiv V(\frac{1}{\lambda}) =$$

$$= \bigcup_{0<v\leq h} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, 1 < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{1/\lambda_i} < (1+b)v \quad (i=1,\ldots,n) \right\}$$

Область $V(\frac{1}{\lambda})$ называется $\frac{1}{\lambda}$-*рогом радиуса* h *и раствора* b.

В случаях применения интегрального представления (3.11) считаем, что $\lambda = \frac{1}{l}$ $\left(\lambda_i = \frac{1}{l_i}, \quad i=1,\ldots,n\right)$. В этом случае носителем данного представления будет *сдвинутый* l-*рог* $x + V(l)$. И в случае $l_1 = \ldots = l_n$ l-рог $V(l)$ является конусом.

Определение 4.1. Открытое множество $G \in E^n$ удовлетворяет *слабому условию* l-рога ($G \in \underline{A}(l,h)$), если существует конечное число K открытых множеств G_k и l-рогов $V_k(l) = V_k(l,h)$, так что справедливо выражение

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} (G_k + V_k(l,h)) \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Открытое множество G удовлетворяет *сильному условию* l-рога ($G \in \overline{A}(l,h)$), если для G выполнено условие (4.1) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{[\delta]} \quad \text{при некотором} \quad \delta > 0,$$

где

$$G_k^{[\delta]} = \{x : x \in G_k, \rho(x, G \setminus G_k) > \delta\}.$$

Определение 4.3. Открытое множество G удовлетворяет условию l-рога ($G \in A(l,h)$), если для G выполнено условие (4.1) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{(\delta)} \quad \text{при некотором} \quad \delta > 0,$$

где

$$G_k^{(\delta)} = \{x : x \in G_k, \rho(x, \partial G_k \setminus \partial G) > \delta\}.$$

На основании приведённых определений, введём классы

$$\underline{A}(l) = \bigcup_{0<h<\infty} \underline{A}(l,h), \quad \overline{A}(l) = \bigcup_{0<h<\infty} \overline{A}(l,h), \quad A(l) = \bigcup_{0<h<\infty} A(l,h).$$

Определение 5.1. Пусть G – открытое множество n-мерного евклидова пространства E^n, $\quad l = (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами $1 \le p \le \infty$. Обозначим через $W_p^l(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f, имеющих на G обобщённые производные $D_i^{l_i} f(x) \quad (i = 1, \ldots, n)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{p,G} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,G} = \|f\|_{p,G} + \|f\|_{L_p^l(G)} .$$

Здесь $L_p^l(G)$ – множество, элементами которого являются классы элементов из $W_p^l(G)$, имеющих все одинаковые производные порядка l.

Сформулируем некоторые основные свойства пространства $W_p^l(G)$ в виде теорем.

Теорема 5.1. *Пространство* $W_p^l(G), \quad 1 \le p \le \infty$, *является банаховым пространством (то есть полным нормированным).*

Теорема 5.2. *Пространство* $W_p^l(G), \quad 1 \le p < \infty$ *сепарабельно.*

Лемма 6.1. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty, \quad \varkappa \le 1$ *и при* $\varkappa = 1$ *либо* $1 < p = q < \infty$, *либо* $1 < p_n < q_n < \infty$, *либо* $1 = p_n < q_n = \infty$.

Тогда $D^\alpha W_p^l(U+V) \hookrightarrow L_q(U)$ *и для* $f \in W_p^l(U+V)$

$$\|D^\alpha f\|_{q,U} \le C_1 h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,U+V} + C_2 h^{-\varkappa} \|f\|_{p,U+V} , \tag{6.1}$$

причём C_1 *и* C_2 *не зависят от* f *и* h, *а* C_2 *не зависит также от* q. *В левой части (6.1)* $D^\alpha f$ *можно заменить на* $D^\alpha f_\varepsilon$ *при любом* $\varepsilon \in (0,h]$.

При $\varkappa < 1$

$$C_1 = C_1' \left(\frac{1}{1-\varkappa} \right)^{1-\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}} \left(\frac{1}{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

где C_1' *не зависит от* q.

вложение пространства $D^\alpha (W_l)^p$ в пространсво L_p

Пространства $Lp(0, T; B)$

Теперь определим класс функций, интегрируемых по Бохнеру. Дадим определение.

Определение: Классом функций $Lp([0, T], \mu; B)$ при $p \in [1, + + \infty)$назовем множество сильно μ-измеримых на отрезке $[0, T]$ B?значных функций, для которых функция времени $\| f(t) \|^p$ μ интегрируема на отрезке $[0, T]$.

Замечание: Пространство $Lp([0, T], \mu; B)$ не является линейным, поскольку нулевой элемент является не единственным. Обозначим через $K([0, T], \mu; B)$ подмножество множества $Lp([0, T], \mu; B)$, состоящее из μ?измеримых B?значных функций равных нулю почти всюду в $[0, T]$. И рассмотрим следующее факторпространство: $Lp([0, T], \mu; B)/K([0, T], \mu; B)$.

Это факторпространство является линейным пространством, поскольку мы отождествили все функции, отличающиеся лишь на множестве нулевой μ-меры Лебега. Значит, отождествлены и все функции равные нулю почти всюду по μ-мере Лебега. Как и всякое факторпространство, введенное факторпространство состоит из дизъюнктных классов эквивалентности. Мы будем использовать этот факт в дальнейшем. Дадим следующее определение.

Определение : Через $Lp([0, T], \mu; B)$ обозначим факторпространство $Lp([0, T], \mu; B)/J0([0, T], \mu; B)$ при $p \in [1, +infty)$. Отдельно нужно рассмотреть случай $p = +\infty$.

Определение : Через $L \in ([0, T], \mu; B)$ обозначим множество μ -измеримых функций, которые почти всюду по норме пространства B ограничены. И аналогично определению 1 дадим следующее:

Определение : Через $L \in ([0, T], \mu; B)$ обозначим факторпространство $L \in ([0, T], \mu; B)/K([0, T], \mu; B)$. Так введенные множества $Lp([0, T], \mu; B)$ при $p \in [1, +\infty)$ являются линейными пространствами. Естественно, возникает вопрос: можно ли сделать банаховыми пространствами относительно некоторой нормы? Справедливы следующие теоремы.

Теорема :

Пространство $Lp([0, T], \mu; B)$ является банаховым при $p \in [1, +?)$ относительно нормы $\| u \|_p$ $(\int_0^T \| u(t) \|^p \psi(dt))^{\frac{1}{p}}$.

Теорема :

Векторное пространство $L \in ([0,T],\mu;B)$ является банаховым относительно нормы $\| u \|_{\infty} \| u(t) \|^{p} \psi(dt)$. Справедливо следующее неравенство Гельдера.

Лемма:

Пусть $u(t) \in Lp([0,T],\mu;B)$ при $p \in [1,+?]$, а $v(t) \in Lq([0,T],\mu;B?)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

то

$v(t), u(t) i \in L1([0,T],\mu)$

и справедливо следующее неравенство Гельдера

$\int_0^T \|(v(t),u(t))\| \mu(dt) \leq \|u\|_p \|v\|_q^*$

где $\| u \|_p \equiv (\int_0^T \| u(t) \|^p \mu(dt))^{\frac{1}{p}}$, $\| v \|_q^* \equiv (\int_0^T \| v(t) \|_q^* \mu(dt))^{\frac{1}{q}}$. Доказательство. Пусть $un(t)$ — это последовательность простых функций для функции $u(t)$, а $vn(t)$ — это последовательность простых функций для функции $v(t)$. Тогда

$\langle vn(t), un(t) \rangle > \langle v(t), u(t) \rangle; \mu$ почти всюду на $[0,T]$.

Но тогда функция $v(t), u(t)$ является μ -измеримой на отрезке $[0,T]$. Кроме того, имеет место неравенство $|\langle v(t), u(t) \rangle| \leq \|v(t)\| * \|u(t)\|$.

Теперь осталось воспользоваться неравенством Гельдера для скалярных функций. Лемма доказана.

Справедлива следующее важное утверждение, доказательство которого мы не будем приводить, поскольку оно достаточно длинное и трудоемкое.

Теорема :

Пусть банахово пространство B является либо рефлексивным либо сепарабельным, тогда формулой

$\int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle dt$ задаются все линейные и непрерывные функционалы над пространством $Lp([0,T],\mu;B)$ при $p \in (1,+\infty)$. . Более того, можно отождествить пространство

$(Lp([0,T],\mu;B))$ с пространством

$Lq([0,T],\mu;B)$ при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Следствие :

При условии рефлексивности банахова пространства B из этой теоремы вытекает рефлексивность пространства $Lp([0,T],\mu;B)$ при $p \in (1,+\infty)$. . Кроме того, справедлив также следующий результат:

Теорема :

Пусть пространство B рефлексивное банахово пространство. Тогда каждый линейный и непрерывный функционал над $L1([0, T], \mu; B)$ представим в следующем виде:

$\langle \phi, f \rangle = \int_0^T \langle f^*(t), f(t) \rangle \mu(dt)$ для всех $f(t) \in L^1([0, T], \mu; B)$,

где $f^*(t) \in L([0, T], \mu; B)$.

Более того, можно отождествить пространство $L^1([0, T], \mu; B)$ с пространством $L([0, T], \mu; B?)$. В дальнейшем нас будут интересовать пространства $Lp(0, T; W_0^{-1.p}(\omega))$ и $Lp \in (0, T; W^{-1.p})$ с показателем $p > 1$, $p^1 = \frac{p}{p-1}$,

а также пространство $L(0, T; W_0^{1.p})$.

Заключение. Нами были рассмотрены пространства L_p, основные интегральные неравенства, на которые ссылались на протяжении работы. Также сформулировали основные понятия, касающиеся производной в смысле С. Л. Соболева и её свойства. Рассмотрели вывод интегрального представления дифференцируемых функций через производные, а также привели понятие об областях определения функций с различными условиями l-рога. Основываясь на введённых ранее понятиях и утверждениях, изложили основную теорию об анизотропных пространствах С. Л. Соболева W_p^l. И в итоге привели две теоремы вложения: вложение пространства $W_p^l(G)$ в пространство $L_q(G)$ и вложение пространства $W_p^l(G)$ в пространство $C(G)$. Также продемонстрировали представление соответствия области условию l-рога с помощью кода, написанного в программе Wolfram Mathematica.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480 с.

2. Ильин В. П. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. Т. 66. С. 227–363.

3. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. с. 256.

4. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. Т. 4. № 46. 1938. С. 471–497.

5. Соболев С. Л. Плотность финитных функций в пространстве L_p^m // Сиб. матем. журн. Т. 4. № 3. 1963, С. 673–682.

6. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1969. с. 480.

7. Мазья В. Г. Пространства Соболева. Л. : Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985. с. 416.

8. Решетняк Ю. Г. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 2. с. 420–432.

9. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полна Г. Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. с. 256.

10. Бесов О. В. Продолжение функций из L_p^l и W_p^l // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 89. С. 5–17.

11. Галахов М. А. О суммируемых областях // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 89. 69 с.

12. Кудрявцев Л. Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. 1959. Т. 55. С. 3–181.

13. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М. : Наука, 1983. С. 284.

14. Бесов О. В. Поведение дифференцируемых функций на негладкой поверхности // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т.117. С. 3–10.

15. Бесов О. В. О следах на негладкой поверхности классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 11–21.

16. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1984. Т. 170. С. 12–30.

17. Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 3. С. 3–26.

18. Глобенко И. Г. Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе // Мат. сб. 1962. Т.57 (99), № 2. С. 201–224.

19. Васильчик М. Ю. Некоторые применения интегральных представлений при исследовании граничных свойств дифференцируемых функций // Тр. Ин-та Математики / РАН. Сиб отд-ние. 1996. Т. 31: Пространства Соболева и смежные вопросы анализа. С. 58–99.

20. Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. С. 1163–1165.