Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического анализа
наименование кафедры

Оптимальное управление в экстремальных задачах для однолистных функций

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Голохвастовой Светланы Андреевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. Гордиенко В.Г.
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н. профессор Прохоров Д.В.
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Проблемы управления, в частности проблемы отыскания наилучшего, оптимального управления, возникает всюду. В настоящее время оптимальное управления выросло в обширную самостоятельную теорию, использующую в своих исследованиях аппарат высшей алгебры, математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений. Обозначим через S - класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$f(x) = z + a_2 z^2 + ..., \tag{1}$$

а через $S(M)$, $M > 1$ - подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M, z \in E$. Классы однолистных аналитических функций представляют собой мощный аппарат теории функций комплексного переменного. Изучение этой области позволяет решать следующие задачи:

- исследование соответствия границ при конформном отображении;
- получение однолистности условий;
- решение различных экстремальных задач теории функций, в частности получение оценок функционалов и областей значений функционалов в том или ином классе.

Проблема коэффициентов однолистных функций заключается в исследовании множеств значений систем начальных коэффициентов разложения (1). В первой части моей выпускной работы рассматривается статья, в которой исследован характер седловой точки множества $V_3 = \Big\{(Rea_2, Ima_2, Rea_3 : f \in S)\Big\}$, доставляемой функцией

$$K_2(z) = \frac{z}{1 - z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1} \in S$$

Функция K_2 соответствует точке (0,0,1) на границе множества V_3. Все граничные точки множества V_3 являются граничными точками множества достижимости управляемой системы, порождённой уравнением Лёвнера:

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, \quad w(z,0)=t,\ t\geq 0.$$

Они могут быть найдены при помощи процесса оптимизации.

Вторая часть работы является самостоятельной. В работе [3 Прохоров Васильева] авторами рассмотрен линейный функционал $L(\alpha,\beta,f) = Re(a_4+\alpha a_3+\beta a_2)$ в классе S^M для M близких к 1. Там, в частности, доказано утверждение о том, что если $(\alpha,\beta)\in l=\{\alpha\leq -2, \beta=-1\}$, то существует константа $M(\alpha,\beta)>1$ такая, что для всех $M\in(1,M(\alpha,\beta))$ и $f\in S^M$ выполняется неравенство

$$L(\alpha,\beta,f)\leq L(\alpha,\beta,f_\lambda^M), \quad \lambda = 1/2+3/4\alpha.$$

Мной доказана следующая теорема

Теорема 5.1. *Существует $M(-3,-1)=2.82037...$ такое, что для всех $M\in(1,M(-3,-1))$ и $f\in S^M$ выполняется неравенство*

$$L(-3,-1,f)\leq L(-3,-1,f_{1/4}^M).$$

Функция $f_{1/4}^M(z)$ доставляет граничную точку множеству

$$V_4(M)=\{(a_2,a_3,L(-3,-1,f):\ f\in S^M\}, \quad M>1.$$

и отображает единичный круг на круг радиуса M с двумя разрезами вдоль отрезков вещественной оси, зависящих от параметра λ.

Работа состоит из введения; определений; основной части, которая состоит из двух разделов; заключения.

Первый раздел состоит из четырёх пунктов. В первом будут даны все основные определения и теоремы. Во втором пункте, описывается принцип максимума Понтрягина. В третьем будет поставлена задача о седловой точке. И в последнем исследование характера седловой точки.

Во втором разделе будет представлена задача об экстремуме линейного функционала в классе ограниченных однолисных функций, сформулирована теорема, будут решены дифференциальные уравнения данной задачи и доказательство основной теоремы.

Основное содержание работы. В данной работе будет максимально подробно рассмотрен метод оптимального управления в поставленной задаче.

Определние 1. Производной функции $f(x)$ в точке z_0 называется конечный предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной величины, когда последнее стремится к нулю произвольным образом, то есть

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \tfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

Определение 2. Точка P называется внутренней точкой множества D, если существует круг с центром в точке P, все точки которого принадлежат множеству D.

Определение 3. Множество D называется областью, если выполнены усовия:

а) каждая точка множества D - внутренняя;

б) любые две точки множества D можно соединить ломанной, все точки которой принадлежат D.

Определение 4. Функция называется аналитической в области, если она в каждой точке этой области имеет конечную производную.

Определение 5. Процесс называется оптимальным в смысле быстродействия, если он имеет наименьшее время перехода из начального фазового состояния в предписанное конечное состояние.

Определение 6. Фазовым пространством рассматриваемого объекта называется n-мерное пространство, в котором в виде точек изображаются фазовые состояния объекта.

Определение 7. Чтобы задать движение объекта, необходимо задать его фазовое состояние в начальный момент времени t_0 и выбрать управляющие функции $u^1(t), ..., u^r(t)$, то есть выбрать векторную функцию

$$u(t) = (u^1(t), ..., u^r(t))$$

Такую функцию $u(t)$ будем называть управлением.

Определение 8. Фазовой траекторией рассматриваемого объекта называется линия, описывающая перемещение объекта в фазовом пространстве.

Определение 9. Пару векторных функций $(u(t), x(t))$, то есть управление $u(t)$ и соответствующую фазовую траекторию $x(t)$ будем называть управляемым процессом.

Определение 10. Множество S всех точек $x = (x^1, ..., x^n)$, удовлетворяющих соотношению

$$f(x^1, ..., x^n) = 0$$

будем называть гиперповерхностью протранства X, а само соотношение - уравнением этой гиперповерхности.

Определение 11. Пусть (X, T) - топологическое пространство, множества $A, B \subset X$. Тогда множество A называется плотным во множестве B, если любая окрестность любой точки B содержит хотя бы одну точку из A, то есть

$$\forall x \in B \forall U \in T (x \in U) \Rightarrow (U \cap A \neq \oslash)$$

Множество A называется всюду плотным, если оно плотно в X.

Определение 12. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = f(x_0)$$

Определение 13. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, за исключением, быть может, конечного числа точек (называемых точками разрыва первого рода) и, кроме этого, имеет односторонние пределы в точках a, b.

Определение 14. Вектором смещения будем называть произвольный вектор вида

$$-f(x(t_1), u(t_1))\delta t + \sum_{i=1}^{S} \Delta(\tau_i, h_i)$$

где δt - неотрицательное число, s - произвольное натуральное число, $\tau_1, ..., \tau_s$ - произвольные точки непрерывности управления $u(t)$, расположенные на интервале $t_0 < t < t_1$,h_i - векторы определяемой формулой

$$h_i = l_i[f((\tau_i), \upsilon_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))]$$

где $l_1, ..., l_s$ произвольные неотрицательные числа, $\upsilon_1, ..., \upsilon_s$ - произвольные точки области управления U.

Лемма. Пусть $u(t)$ - такое допустимое управление, под воздействием которого объект в течении $t_0 < t < t_1$ промежутка времени переходит из заданного начального состояния x_0 в предписанное конечное состояние x_1. Соответствующую фазовую траекторию обозначим через $x(t)$. Если конус K (множество, образованное концами всевозможных векторов смещения, отложенных от некоторой точки) совпадает со всем фазовым пространством X, то процесс $(u(t), x(t)$ не является оптимальным.

Следствие. Пусть $\delta x(t) = (\delta x^1(t), ..., \delta x^n(t)$ - произвольное решение системы уравнений в вариациях

$$\frac{d(\delta x^i)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^i(x^1(t),...,x^n(t),u^1(t),...,u^r(t))}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha, i = 1, ..., n,$$

а $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t))$ - произвольное решение сопряженной системы

$$\frac{\partial(\psi_i)}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^i(x^1(t),...,x^n(t),u^1(t),...,u^r(t))}{\partial x^\alpha} \psi_\alpha, i = 1, ..., n.$$

Тогда скалярное произведение

$$\psi(t)\delta x(t) = \psi_1(t)\delta x^1(t) + ... + \psi_n(t)\delta x^n(t)$$

постоянно (на всем отрезке, на котором заданы оба решения $\psi(t)\delta x(t)$).

Теоремма 2.1. Если процесс $(u(t), x(t)), t_0 \leq t \leq t_1$ оптимален , то существует такое решение $\psi(t)$ системы (2.7), для которого выполнены условия (2.9) и (2.10) (где τ - произвольная точка непрерывности управления $u(t)$, а υ - произвольная точка области управления U). При этом решение нетривиально $\psi(t)$.

Теорема 2.2 *"принцип максимума "*. Рассматривается объект, движение которого описывается системой уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = f^i(x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r) = f^i(x, u), i = 1, ..., n$$

или

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, u) \tag{2.15}$$

В пространстве переменных $u^1, ..., u^r$ задано некоторое множество U, (область управления); допустимым управлением считается произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t) = (u^1(t), ..., u^r(t))$ со значениями в U, непрерывная в концах отрезка, на котором она определена. Далее, в фазовом пространстве X переменных $x^1, ..., x^n$ заданы две точки $x_0 x_1$ (начальное и конечное фазовое состояния) рассматривается некоторый процесс $(u(t), x(t))$ переводящий объект из состояния x_0 в состояние x_1; это означает, что $x(t)$ есть решение системы (2.15), соответствующее допустимому управлению $u = u(t)$ и удовлетворяющее начальному и конечному условиям.

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1.$$

Таким образом, рассматриваемый процесс затрачивает на переход из состояния x_0 в x_1 время, равное $t_1 - t_0$. Процесс $(u(t), x(t))$ называется оптимальный (в смысле быстродействия), если не существует процесса, переводящего объект из состояния x_0 в состояние x_1 за меньшее время. Для формулировки необходимого условия оптимальности введем функцию H, зависящую от переменных $x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r$ и некоторых вспомо гательных переменных $\psi_1, ..., \psi_n$:

$$H(\psi, x, u) = \psi f(x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u) \tag{2.16}$$

запишем систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H(\psi, x(t), u(t))}{\partial x^i}, i = 1, ..., n \tag{2.17}$$

где $(u(t), x(t))$-рассматриваемый процесс. Для оптимальности процесса $(u(t), x(t))$ необходимо существование такого нетривиального решения $\psi(t), t_0 \leq t \leq t_1$ системы (2.17), что для любого момента τ, являющегося точкой непрерывности управления $u(t)$ выполнено условие максимума

$$H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \max_{v \in U} H(\psi(\tau), x(\tau), v), \tag{2.18}$$

а в конечный момент времени выполнено условие

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geq 0 \tag{2.19}$$

Лемма 3.1. *Условие достижения максимума функции Гамильтона $H(0, 0, \xi, u)$, $\xi = \Psi(0)$, в двух точках на отрезке $[-\pi, \pi]$ возможно лишь при $\xi_2 = \Psi_2(0) = 0$.*

Теорема 4.1. *Функция F имеет в точке $(0, 0)$ локальный максимум по переменному и локальный минимум по переменному q.*

Теорема 5.1. *Существует $M(-3, -1) = 2.82037...$ такое, что для всех $M \in (1, M(-3, -1))$ и $f \in S^M$ выполняется неравенство*

$$L(-3, -1, f) \leq L(-3, -1, f^M_{1/4}).$$

Функция $f^M_{1/4}(z)$ доставляет граничную точку множеству

$$V_4(M) = \{(a_2, a_3, L(-3, -1, f) : \ f \in S(M))\}, \quad M > 1.$$

Задача 1.*Пусть*

$$F^M : (\Psi(0), \lambda) \to x_5(1 - 1/M)$$

является функцией, которая всякому начальному данному $\Psi(0)$ и параметру λ в экстремальной задаче (5.6)-(5.12), со скользящим оптимальным ре-

жимом, сопоставляет значение $x_5(1 - 1/M)$. *Положим*

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0)) = (0, \alpha_1, 0, \alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)),\ (\alpha_1, \alpha_2) \to 0,$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

согласно чему $F^M = F^M(\alpha)$. *Требуется найти значение* $M(-3, -1)$ *такое, что для всех* $M \in (1, M(-3, -1))$ *функция* $F^M(\alpha)$ *достигает локального максимума в точке* $\alpha = 0$.

Заключение. Каждому из нас приходилось управлять различными объектами. Общим во всех случаях является то, что мы можем в той или иной степени влиять на поведение такого объекта. Переход управляемого объекта из одного состояния в другое можно осуществить разными способами. Поэтому выбирается тот путь, который с некоторой точки зрения окажется наиболее выгодным. Так появляется понятие оптимального управления. Задачи оптимального управления, составляют один из широких классов экстремальных задач и имеют важное прикладное значение. В данной работе мы сформулировали принцип максимума Понтрягина, представляющий собой необходимое условие оптимальности. Открытие этого принципа послужило важным стимулом в создании математической теории оптимального управления. Оно стимулировало новые исследования в теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе, теории экстремальных задач и других смежных областях. В данной работе с помощью дифференциального уравнения Лёвнера и принципа максимума Понтрягина были решены две экстремальные задачи для однолистных функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения/Л.С. Понтрягин // Наука,1974

2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного/Г.М. Голузин// Наука, 1966 640с.

3. Прохоров Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций/Д.В. Прохоров // Матем. Сборник. - 1990. - Т.181. - № 12. - С.1659-1677.

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимального управления. /В.Г. Болтянский// - М.: Наука, 1969. - 308 с.

5. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture// LOMI Preprints E-5-84. - 1984. - P.1-21.

6. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture// Acta Math. - 1985. - V.154. - N.1-2. - P.137-152.

7. Pick G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet// S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II a. - 1917. - B.126. - P.247-263.

8. Захаров А.М., Прохоров Д.В. Седловые точки множества начальных коэффициентов однолистных функций// Математика. Механика.: Сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун.-та,2003.Вып.5.С.33-36.

9. Prokhorov D.,Vasileva Z. Linear extremal problems for univalent functions close to identity//Bull.Soc.Sci.et Lettre.:Lodz,1995.pp. 11-17,v.XLV.

10. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций /И.А. Александров.// М.: Наука, 1976. С. 11-16

11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения /Л.С. Понтрягин.// Наука, 1982. С.328.

12. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций /А.И. Маркушевич.// М.: Гостехиздат, 1950.

13. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления В.Г. Болтянский М., 1966.