Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа
наименование кафедры

Точные неравенства Ландау в пространствах $L_P(R^m)$

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 группы
направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Бисенгалиевой Альбины Салаватовны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. | подпись, дата | Тимофеев В.Г.
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н. | подпись, дата | Прохоров Д.В.
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение.Экстремальные задачи типа Ландау-Колмогорова и особенно тесно связанные с ними задачи наилучшего приближения операторов дифференцирования, а также задачи восстановления операторов на множествах, заданных с известной ошибкой, являются очень важной и интересной областью теории функций. Эти задачи важны в смысле изучения теорем вложения одних функциональных пространств в другие, они дают ясные и простые априорные оценки решений задач математической физики и находят широкое применение в новой и интенсивно развивающейся области математической физики - теории некорректно поставленных задач.

Целью данной работы является изучение экстремальных неравенств типа Ландау-Колмогорова, тесно связанных с ними, задач наилучшего приближения операторов дифференцирования ограниченными линейными операторами на некоторых классах функций многих переменных.

Для достижения цели были опеределены следующие задачи:

- рассмотреть основные этапы истории одномерных задач типа Ландау-Колмогорова;
- доказать неравенства типа Колмогорова для k-итерированного оператора Лапласа в пространстве $L_2(R^2)$;
- изучить задачи наилучшего приближения оператора дифференцирования в равномерной метрике;
- изучить задачи наилучшего приближения оператора дифференцирования в метрике пространства $L_2(R^m)$;
- получить верхнюю и нижнюю оценку для наилучших констант в неравенствах типа Ландау-Колмогорова в $L_2(R^m)$.

Работа состоит из введения; основной части, которая в свою очередь состоит из 4 разделов, некоторые из них имеют разделение на пункты; заключения; списка используемых источников, состоящего из 25 наименований.

Первый раздел состоит из двух пунктов. В первом пункте отмечаются основные этапы истории одномерных задач типа Ландау-Колмогорова. Во втором пункте доказываются неравенства типа Колмогорова для k-итерированного оператора Лапласа в пространстве $L_2(R^2)$ и рассматриваются родственные им задачи.

Во втором разделе изучаются задачи наилучшего приближения оператора дифференцирования в равномерной метрике. Решены экстремальные задачи типа Ландау-Колмогорова и неккоректные задачи оптимального восстановления оператора дифференцирования.

В третьем разделе изучаются задачи наилучшего приближения оператора дифференцирования в метрике пространства $L_2(R^m)$

В четвертом разделе находятся верхняя и нижняя оценки для точных констант в неравенствах типа Ландау-Колмогорова в $L_p(R^m)$

Основное содержание работы.Пусть k, n $(0 \leq k < n)$- целые числа, $p \geq 1$, $0 < q$, $r \leq \infty$, I - числовая ось $(-\infty, \infty)$ или полуось $[0, \infty)$, пространства C=C(I) и $L_p = L_p(I)$ определены обычным образом, $L^n_{p,r}$ - множество функций $f \in L_r$, у которых (n-1)-ая производная локально абсолютно непрерывна на I, а $f^{(n)} \in L_p$.

Неравенствами типа Ландау-Колмогорова будем называть неравенства вида:

$$\left\| f^{(k)} \right\|_{L_q} \leq D \left\| f \right\|^{\alpha}_{L_r} \left\| f^{(n)} \right\|^{\beta}_{L_p}, \tag{1.1}$$

$f \in L^n_{p,r}$, где α, β, D - постоянные, которые не зависят от f, а $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$. D - константа, которая может быть конечной лишь при :

$$\alpha = \frac{n - k - p^{-1} + q^{-1}}{n - p^{-1} + r^{-1}}, \beta = 1 - \alpha$$

Если в неравенстве (1.1) константа D наилучшая, то есть

$$D = \sup_{f \in L^n_{p,r}} \left\| f^{(k)} \right\|_{L_q} \left\| f \right\|^{-\alpha}_{L_r} \left\| f^{(n)} \right\|^{-\beta}_{L_p},$$

то функцию $u \in L^n_{p,r}$, отличную от постоянной, на которой неравенство (1.1) обращается в равенство, называют экстремальной, а неравенство (1.1) - точным; будем говорить, что экстремальная функция единственная, если любая другая экстремальная функция имеет вид $cu(\nu t + \mu)$, где $\nu > 0$, μ, c - некоторые числа, причем $\mu = 0$, если $I = [0, \infty)$.

Наряду с задачей (1.1) мы будем рассматривать частный случай задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами.

Пусть $K^n_{p,r}$ - класс функций $f \in L^n_{p,r}$, у которых $\left\|f^{(n)}\right\|_{L_p} \leq 1$, а $\Sigma(N)$- множество линейных ограниченных операторов A, действующих из L_r в L_q с нормой

$$\|A\| = \|A\|^{L_q}_{L_r} \leq N$$

Положим

$$\rho(A) = \sup_{f \in K^n_{p,r}} \left\|f^{(k)}(x) - A(x,f)\right\|_{L_q}, E(N) = \inf_{A \in \Sigma(N)} \rho(A)$$

В частном случае $q = r = \infty$ будем считать

$$E(N) = \inf_{\|A\|^c_c \leq N} \sup_{\left\|f^{(n)}\right\|_{L_p} \leq 1} \left\|f^{(k)}(x) - A(x,f)\right\|_c = E_\infty(N)$$

Задача состоит в вычислении величины E(N) и определении экстремального оператора A_N, удовлетворяющего условиям:

$$A_N \in \Sigma(N), \rho(A_N) = E(N)$$

Для произвольных h>0, $\bar{N} > 0$ справедливо равенство

$$E(h^{-k+q^{-1}-r^{-1}}\bar{N}) = h^{n-k+q^{-1}-p^{-1}}E(\bar{N});$$

причем если при $N = \bar{N}$ экстремальный вектор A_N существует, то оператор $h^{-k}A_{\bar{N}}(xh^{-1}, f(ht))$ будет экстремальным при $N = h^{-k+q^{-1}-r^{-1}}\bar{N}$. В случае p=q=2 это утверждение доказано С.Б.Стечкиным, для произвольных значений параметров - Арестовым.

Рассмотрим, наконец, еще один тип задач. Пусть X, Y - линейные, нормированные пространства, W - множество в X, A - оператор из W в Y, τ - множество θ всех операторов или множество $\mathcal{L}$ - линейных операторов из X в Y.

При $\delta \geq 0$ положим

$$\nu(\delta,\tau) = \inf_{T\in\tau} \sup_{x\in W} \sup_{\|\eta - x\|_X \leq \delta} \|A_x - T_\eta\|_Y$$

Доказана связь $\nu(\delta,\tau)$ с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора A на W линейными ограниченными операторами. Известно, например, что

$$\nu(\delta,\theta) \leq H(Y)\Omega(2\delta)$$

где $H(Y)$ - константа Юнга пространства Y, а $\Omega(t)$ - модуль непрерывности A на W.

Пусть теперь X, Y - линейные, нормированные пространства, A - оператор из X в Y с областью определения D(A). Если оператор A не является непрерывным, то задача вычисления значений оператора A на элементах $x \in D(A)$ является некорректной. Кроме того, может случиться, что информация об элементе x является неполной. Например, элемент x задан с погрешностью; вместо x известно значение V_x, заданное с погрешностью δ.

Найдем величину наилучшего приближения в пространстве $L_2(R^2)$ k-итерированного оператора Лапласа линейными ограниченными операторами A(f) на классе функций f(x), принадлежащих вместе со своими частными производными до порядка 2n включительно пространству L_2, где $L_2(R^2)$ - пространство измеримых (вообще комплекснозначных) функций, заданных на R^2, с нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x_1,x_2)|^2 \, dx_1 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Обозначим этот класс $-\Omega$.

В главе устанавливается многомерный аналог известных одномерных неравенств

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{L_2} < \|f\|_{L_2}^{\frac{(n-k)}{n}} \left\|f^{(n)}\right\|_{L_2}^{\frac{k}{n}}, (0 < k < n).$$

Выписывается величина погрешности вычисления значения к-итерированного оператора Лапласа на элементах некоторого множества, заданного с погрешностью $\delta (\delta \geq 0)$.

Пусть A(f) - произвольный линейный оператор, действующий из пространства $L_2(R^2)$ в пространство $L_2(R^2)$, с нормой $||A||_{L_2}$, непревосходящей заданного числа N, которое нам удобно выбрать в виде

$$N = \frac{n-k}{n}(\frac{1}{h})^k, h > 0$$

Следуя С.Б.Стечкину, поставим задачу о вычислении наилучшего приближения к-итерированного оператора Лапласа операторами $A(f)$ на классе функций $f \in \Omega$ с нормой $\|\Delta^n f\|_{L_2} \leq 1$, то есть о нахождении величины

$$E_N = \inf_{\|A\|_{L_2} \leq N} \sup_{f \in \Omega, \|\Delta^n f\|_{L_2} \leq 1} \left\| \Delta^k f - A(f) \right\|_{L_2}$$

Следуя В.В.Арестову, ставим задачу о нахождении величины наилучшего восстановления к-итерированного оператора Лапласа на множестве элементов, заданных с ошибкой, с помощью операторов некоторого класса τ

$$\nu_\delta(\tau) = \inf_{A \in \tau} \sup_{f \in \Omega, ||\Delta^n f||_{L_2} \leq 1, v \in L_2(R^2), ||f - v||_{L_2} \leq \delta} ||\Delta^k f - Av||_{L_2},$$

где τ-множество θ всех операторов или множество $\mathcal{L}$ линейных операторов из $L_2(R^2)$ в $L_2(R^2)$.

Наконец, следуя Ю.Г.Боссе(Г.Е.Шилову), назовем неравенством типа Колмогорова для к-итерированного оператора Лапласа неравенство вида:

$$\left\| \Delta^k f \right\|_{L_q} \leq K \left\| f \right\|_{L_p}^{\alpha} \left\| \Delta^n f \right\|_{L_r}^{\beta}$$

$\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, где α, β, K - постоянные, которые не зависят от f, а зависят от n, k, p, q, r. Так как мы рассматриваем случай p=q=r=2, то для этого случая неравенство примет вид:

$$\left\| \Delta^k f \right\|_{L_2} \leq K \left\| f \right\|_{L_2}^{\alpha} \left\| \Delta^n f \right\|_{L_2}^{\beta}$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.1. Для любых натуральных k и n (0<k<n) и любой функции $f(x_1, x_2) \in \Omega$ справедливо неравенство:

$$\left\|\Delta^k f\right\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}^{\frac{(n-k)}{n}} \|\Delta^n f\|_{L_2}^{\frac{k}{n}},$$

причем неравенство точное.

Теорема 1.1 позволяет решить задачу Стечкина о наилучшем приближении к-итерированного оператора Лапласа.

Теорема 1.2. Для любых натуральных чисел k и n, связанных соотношением 0<k<n, и любого натурального $N = \frac{n-k}{n}(\frac{1}{h})^k, h > 0$ справедливо равенство:

$$E_N = \frac{k}{n} h^{n-k}.$$

Оператор

$$A(f) = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) e^{i(x,t)} dt_1 dt_2,$$

где функция $\lambda(t_1, t_2)$ - определена формулой

$$\lambda(t_1, t_2) = \begin{cases} (t_1^2 + t_2^2)^k - \frac{k}{n} h^{n-k} (t_1^2 + t_2^2)^n, & \text{если } t_1^2 + t_2^2 \leq (\frac{n}{k})^{\frac{1}{(n-k)}} \frac{1}{h}, \\ 0, & \text{если } t_1^2 + t_2^2 \geq (\frac{n}{k})^{\frac{1}{(n-k)}} \frac{1}{h}. \end{cases}$$

является оператором наилучшего приближения.

Теоремы 1.1 и 1.2 позволяют решить задачу восстановления к-итерированного оператора Лапласа на классе функций Q и найти величину $\nu_\delta(\tau)$.

Теорема 1.3. Для любого $\delta \geq 0$ справедливо равенство

$$\nu_\delta(\theta) = \nu_\delta(\mathcal{L}) = \delta^{\frac{n-k}{n}}.$$

Оператор A при $h = \delta^{\frac{1}{n}}$ является экстремальным в задаче восстановления для $\tau = \theta$ и $\tau = \mathcal{L}$.

Пусть

$$U_2 = \{u : u \in L_2, \Delta^n u \in L_2\}.$$

Оператор Лапласа $\Delta^n u$ понимается в обобщенном смысле, а именно: относительно пары функций $u \in L_2$, $v \in L_2$ считаем, что $u \in U_2$ и $v = \Delta^n u$, если для любой функции $\varphi \in S$ выполняется равенство

$$\int\limits_{R^m} v\varphi dx = \int\limits_{R^m} u\Delta^n \varphi dx.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор следующего вида:

$$\mathcal{P}_k u = \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m=k} C_\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_m^{\alpha_m}}, \tag{2.1}$$

где C_α - постоянные коэффициенты. Этот оператор определяется однородным полиномом

$$p_k(t) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha t_1^{\alpha_1} ... t_m^{\alpha_m}$$

При k=0 считаем, что $\mathcal{P}_0 u = u$. Вначале выпишем условия на n, m и оператор (2.1), при выполнении которых для любой функции $u \in U_2$ функция $\mathcal{P}_k u$ принадлежит $C(R^m)$ и при любых A, B конечна величина

$$\omega(A,B) = \sup\left\{\|\mathcal{P}_k u\|_C : u \in U_2, \|u\|_{L_2} \le A, \|\Delta^n u\|_{L_2} \le B\right\}$$

Теорема 2.1. Для любых целых $\alpha_i \ge 0$ и натуральных m, n при выполнении условий $0 \le k < 2n$, $m < 2(2n-k)$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = k$ для любых $u \in U_2$ справедливо точное неравенство

$$\|\mathcal{P}_k u\|_C \le \left(\frac{4na}{4n-2k-m}\right)^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \left(\frac{4nb}{2k+m}\right)^{\frac{2k+m}{4n}} \|u\|_{L_2}^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \|\Delta^n u\|_{L_2}^{\frac{2k+m}{4n}} \tag{2.11}$$

где

$$a = \left\{\frac{(4n-2k-m)\, I}{32n^2\pi^{m-1}\sin\pi\frac{2k+m}{4n}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$b = \left\{\frac{(2k+m)\, I}{32n^2\pi^{m-1}\sin\pi\frac{2k+m}{4n}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Знак равенства в (2.11) достигается на функциях $u(x) = c\mathcal{F}_v(x)$, $v \neq 0$, c=const.

$$\mathcal{F}_v(x) = \frac{1}{(2\pi)}^{\frac{m}{2}} \int\limits_{R_m} \frac{\sum\limits_{|\alpha|=k} C_\alpha t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}}{1+\left(v^2 \sum\limits_{i=1}^{m} t_i^2\right)^{2n}} e^{ixt} dt$$

Используя данную теорему, мы получаем возможность решить задачу наилучшего приближения оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на множестве

$$Q = \left\{u : u \in U_2; \left\|\Delta^n u\right\|_{L_2} \leq 1\right\},$$

а именно вычислить величину

$$E(N) = \inf_{\|S\|_{L_2 \to C \leq N}} \sup_{u \in Q} \left\|\mathcal{P}_k u - Su\right\|_C .$$

Теперь будем рассматривать дифференциальные операторы вида

$$\mathcal{P}_k u = \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m} C_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

где C_α- постоянные коэффициенты. Эти операторы определяются однородным полиномом

$$p_k(t) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}$$

При k=0 считаем, что $\mathcal{P}_0 u = u$. Пусть $u \in L_2$ и

$$\widehat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{R_m} u(t) e^{-ixt} dt$$

есть преобразование Фурье функции u в смысле L_2 или, то же самое, в смысле теории обобщенных функций. По теореме Планшереля $\widehat{u} \in L_2$ и, более того,

$$\left\|\widehat{(u)}\right\|_{L_2} = \left\|(u)\right\|_{L_2} .$$

Известно из работы В.С.Владимирова, что если $u \in S$, то $\widehat{u} \in S$. Ясно, что у функции $u \in U_2$ производная любого порядка $k \leq 2n$ является классической функцией и принадлежит L_2. Действительно, если $|\alpha| = k \leq 2n$, то

$$\frac{t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}}{1 + |t|^{2n}} \in L_\infty$$

и поэтому

$$\frac{\widehat{\partial^k u}}{\partial^{\alpha_1} t_1 \dots \partial^{\alpha_m} t_m} = i^k t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m} \widehat{u}(t) = i^k \frac{t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}}{1 + |t|^{2n}} \left(1 + |t|^{2n}\right) \widehat{u} \in L_2$$

Теорема 3.1. Для любых целых $\alpha_i \geq 0$ и натуральных чисел m, k и n при выполнении условий

$$k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, 0 < k < 2n,$$

для любых $u \in U_2$ справедливо точное неравенство

$$\|\mathcal{P}_k u\|_{L_2} \leq \|p_k\|_{C(S^{m-1}} \|u\|_{L_2}^{\frac{2n-k}{2n}} \|\Delta^n u\|_{L_2}^{\frac{k}{2n}},$$

где S^{m-1}- единичная сфера пространства R^m.

Теорема 3.1 дает нам возможность решить задачу о наилучшем приближении оператора дифференцирования на множестве Q.

Ранее полученные в работе результаты позволяют оценить сверху и снизу наилучшую константу K_p в неравенстве

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \leq K_p \|u\|_p^{\frac{1}{2}} \|\Delta u\|_p^{\frac{1}{2}}, i = \overline{1, m} \tag{4.1}$$

при любых $1 \leq p \leq \infty$. Пусть

$$U_p = u : u \in L_p, \Delta u \in L_p,$$

где, как и раньше Δu- понимается в смысле Соболева.

Теорема 4.1. При всех $1 \le p \le \infty$ для любой функции $u \in U_p$ справедливо неравенство (4.1) с конечной константой K_p, причем для наилучшей константы K_p справедливы оценки

$$1 = K_2 \le K_p \le K_\infty = K_1 = \sqrt{2}.$$

Заключение Итак, в данной работе выполнены поставленные цель и задачи: были изучены экстремальные неравенства типа Ландау-Колмогорова и тесно связанные с ними задачи наилучшего приближения операторов дифференцирования ограниченными линейными операторами на некоторых классах функций многих переменных, которые являются важной областью теории функций. Рассмотрены основные этапы истории одномерных задач типа Ландау-Колмогорова, доказаны неравенства типа Колмогорова для k-итерированного оператора Лапласа в пространстве $L_2(R^2)$, изучены задачи наилучшего приближения оператора дифференцирования в равномерной метрике, изучены задачи наилучшего приближения оператора дифференцирования в метрике пространства $L_2(R^m)$, получены верхняя и нижняя оценки для наилучших констант в неравенствах типа Ландау-Колмогорова в $L_2(R^m)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Арестов, В. В. О точных неравенствах между нормами функций и их производных. Asta Sci. Math.,т. 33, 1972. 242-267с.

2 Арестов, В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора. Математические заметки, т. 22, вып. 2 1977. 231-244 с.

3 Арестов, В. В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования. Математические заметки, т. 1, вып. 2 1967. 291-298 с.

4 Боссе, Ю. Г. О неравенствах между производными. / Г. Е. Шилов. Московский университет. Сборник работ научных студенческих кружков, 1937. 17-27 с.

5 Бердышев, В. И. О наилучшем приближении в $L[0,\infty)$ оператора дифференцирования. Математические заметки, т. 9, вып. 5 1971. 477-481 с.

6 Буслаев, А. П. О приближении оператора дифференцирования. Математические заметки, т. 29, вып. 5 1981. 731-749 с.

7 Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

8 Габушин, В. Н. Неравенства для норм функции и её производных в метриках L_p. Математические заметки, т. 1, вып. 3 1967. 291-298 с.

9 Габушин, В. Н. О наилучшем приближении операторов дифференцирования на полупрямой. Математические заметки, т. 6, вып. 5 1969. 573-582 с.

10 Габушин, В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах. Математические заметки, т. 8, вып. 5 1970. 551-562 с.

11 Коновалов, В. Н. Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных и косых производных. Математические заметки, т. 23, вып. 1 1978. 67-78 с.

12 Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, т.2, 1981. 584 с.

13 Стечкин, С. Б. Неравенства между нормами производных произвольной функции. Asta Sci., Math., 26 , 1965. 225-230 с.

14 Стечкин, С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов. Математические заметки, т.1, вып. 2 1967. 137-148 с.

15 Субботин, Ю. Н. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2./ Л.В.Тайков. Математические заметки, т. 3, вып. 2 1968. 157-164 с.

16 Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах./ Г.Вейс. М.: Мир; пер. с англ., 1974. 335 с.

17 Тайков, Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования. Математические заметки, т. 4, вып. 2 1968. 221-232 с.

18 Тимошин, О. А. Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости. Математические заметки, т. 36, вып. 2 1984. 369-377 с.

19 Тимофеев, В. Г. Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа. Саратов: изд-во СГУ, в книге "Теория функций и приближений 1983. 84-92 с.

20 Тимофеев, В. Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных. Математические заметки, т. 37, вып. 5, 1985. 676-689 с.

21 Харди, Г. Неравенства./ Дж. Литтльвуд / Г. Полиа. М.: Наука; пер. с англ., 1948. 454 с.

22 HaDamars, I. Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees. Sos. math. France; Comptes rendus des seances, 41 1914. 68-72.

23 Landau, E. Einige Ungleichungen fur zweimal differentiierbare Functionen. Proc. London Math. Sos.,(2), 13 1913. 43-49.

24 Sz.-Nady, B. Uber Integralungleichungen zwichen einer Function und ihrer Ableitung. Asta Sci. Math., 10 1941, 64-74.

25 Hardy, G. H. Contribution to the arithmetic theory of series./ I.E.Littlewood. Proc. London Math. Sos. vol.,(2) 11 1912. 411-478.