Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Уравнение Лёвнера и принцип максимума Понтрягина в задаче на классе однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 группы

направления *02.03.01 – Математика и компьютерные науки*

механико-математического факультета

Арбузовой Дарьи Алексеевны

Научный руководитель

Доцент, к.ф.-м.наук ______________ В.Г. Гордиенко

Зав. кафедрой
Профессор, д.ф.-м.наук, профессор ______________ Д.В.Прохоров

Саратов 2017

Введение. Введём в рассмотрение класс S, голоморфных и однолистных функций в единичном круге $U = \{z: \ |z| < 1\}$:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Подкласс ограниченных функций $|f(z)| < M, \ M \geq 1$ обозначим $S^M, \ S^\infty \equiv S$. В 1967 году E.Bombieri[1] поставил задачу нахождения чисел

$$\sigma_{mn} = \liminf_{f \to K, f \in S} \frac{n - Re\ a_n}{m - Re\ a_m}, \ m, n \geq 2,$$

где $f \to K$ локально равномерно в U. Будем называть σ_{mn} числами Bombieri. В своей работе он доказал, что $\sigma_{mn} \leq B_{mn}$ для нечетного n и $m = 3$, где

$$B_{mn} = \min_{\theta \in [0, 2\pi)} \frac{n sin\theta - sin(n\theta)}{m sin\theta - sin(m\theta)}.$$

В 2001 году R.Greiner и O.Roth[2] получили число Bombieri $\sigma_{32} = \dfrac{e-1}{4e} < \dfrac{1}{4} = B_{32}$.

В 2005 году Прохоров Д.В. и Васильев А.Ю.[3], применяя параметрическое представление однолистных функций интегралами уравнения Лёвнера и метод оптимального управления, нашли числа Bombieri

$$\sigma_{42} = 0,050057\ldots, \ \sigma_{24} = 0,969556\ldots, \ \sigma_{34} = 0,791557\ldots$$

В этой работе рассматривается класс S^M ограниченных однолистных функций. Для этого класса экстремальной функцией во многих задачах является функция Пика:

$$P_M(z) = MK^{-1}\Big(\frac{K(z)}{M}\Big) = z + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n.$$

G.Pick[4] в 1917 году получил точную оценку $|a_2| \leq 2\Big(1 - \dfrac{1}{M}\Big) = p_2(M)$ в классе S^M. Коэффициент a_3 независимо друг от друга оценивали A.C.Schaeffer,

D.C.Spencer[5] в 1945 году и O.Tammi[6] в 1953 году. В 1965 году O.Tammi и M.Schiffer[7] получили, что $|a_4| \leq p_4(M)\ \forall\ f \in S^M,\ M > 300$. В 1978 году этот результат в более слабой форме ($M > 700$) был повторен O.Tammi[8].
Целью моей выпускной работы является численное решение задачи нахождения числа Bombieri σ_{42}. Задачи работы заключаются в следующем:

- изучить семейства областей и дифференцируемость отображений по параметру;
- изучить метод нахождения числа Bombieri σ_{42};
- разработать численный алгоритм решения поставленной задачи с помощью программного пакета Maple.

Основное содержание работы.

Параметрическое представление однолистных функций основывается на дифференциальном уравнении Лёвнера[9]:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega\frac{e^{iu} + \omega}{e^{iu} - \omega},\ \omega|_{t=0} = z,\ t \geq 0,$$

где $u = u(t)$ кусочно-непрерывная управляющая функция при $t \geq 0$. Поэтому первым шагом на пути решения поставленной задачи будет описание семейства областей Лёвнера

$$\Delta(\lambda) = \Delta \setminus \bigcup_{k=1}^{n}(L_k \setminus L_k(\lambda_k)),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ - произвольная точка полузамкнутого n - мерного параллелепипеда $\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) :\ 0 \leq \lambda_k < \lambda_k^0,\ k = 1, \ldots, n\}$, $L_k = \{\omega :\ \omega = \varphi_k(\lambda_k),\ 0 \leq \lambda_k < \lambda_k^0\},\ (k = 1, \ldots, n)$.
В ходе изучения этого вопроса будет доказана
Теорема Каратеодори[10]. Пусть

1. B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ - односвязная область в $\mathbb{C}_w,\ B_n \neq \mathbb{C}_w$;
2. $B_n \ni 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим через $w = f_n(z),\ f_n(0) = 0, f_n'(0) > 0$ голоморфную однолистную в круге E функцию, отображающую E на B_n. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- последовательность функций $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно сходится внутри E к конечной функции;
- последовательность областей B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к ядру относительно точки $w = 0$, отличному от $\mathbb{C}_w$.

  Кроме того,
- если $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \equiv 0$, то $Ker\{B_n\} = \{0\}$;
- если $f(z) \not\equiv 0$, то последовательность областей B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к невырожденному ядру, являющемуся образом круга E при отображении $w = f(z)$;
- если $Ker\{B_n\} = \{0\}$, то $f(z) \equiv 0$;
- если $Ker\{B_n\}$ невырождено и отлично от $\mathbb{C}_w$, то функция $f(z)$ голоморфна и однолистна в круге E и отображает его на ядро, причем $f(0) = 0,\ f^{'}(0) > 0$, а функции $\varphi_n(w) = f_n^{-1}(w)$ равномерно сходятся внутри ядра к функции $\varphi(w) = f^{-1}(w),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi^{'}(0) > 0$, заданной в ядре.

В уравнении Лёвнера сделаем замену переменной $t \to 1 - e^{-t}$, тогда:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-\omega}{1-t}\frac{e^{iu}+\omega}{e^{iu}-\omega},\ \omega|_{t=0} = z,\ 0 \le t \le 1. \tag{1}$$

В 1945 году A.C.Schaeffer и D.C.Spencer[5] доказали, что интегралы

$$\omega = \omega(z,t) = (1-t)(z + a_2(t)z^2 + \ldots) \tag{2}$$

уравнения (1) представляют собой всюду плотный подкласс функций $f \in S^M$

$$f(z) = M\omega\Big(z, 1 - \frac{1}{M}\Big). \tag{3}$$

Обозначим $a_k \equiv x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t),\ k = 2, 3, 4$. Из (2) и (1) получим:

$$\dot{x}_1(t) = -2cos\ u,\ x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = 2sin\ u,\ x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = -4(x_1 cos\ u + x_2 sin\ u) + 2(t-1)cos\ 2u,\ x_3(0) = 0, \tag{4}$$

$$\dot{x}_4(t) = 4(x_1 sin\ u - x_2 cos\ u) - 2(t-1) sin\ 2u,\ x_4(0) = 0,$$

$$\dot{x}_5(t) = -2((2x_3+x_1^2-x_2^2)cos\ u+2(x_4+x_1x_2)sin\ u)+6(t-1)(x_1cos\ 2u+x_2sin\ 2u)-$$

$$-2(t-1)^2 cos\ 3u,\ x_5(0) = 0.$$

Поставим в классе S^M экстремальную задачу

$$x_1\Big(1-\frac{1}{M}\Big) + \mu x_3\Big(1-\frac{1}{M}\Big) + \nu x_5\Big(1-\frac{1}{M}\Big) \to max \tag{5}$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(t,x,\psi,u) = -2cos\ u\psi_1 + 2sin\ u\psi_2 - (4(x_1cos\ u + x_2sin\ u) - 2(t-1)cos\ 2u)\psi_3 +$$

$$+(4(x_1sin\ u - x_2cos\ u) - 2(t-1)sin\ 2u)\psi_4 - (2((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)cos\ u + \tag{6}$$

$$+2(x_4 + x_1x_2)sin\ u) - 6(t-1)(x_1cos\ 2u + x_2sin\ 2u) + 2(t-1)^2cos\ 3u)\psi_5,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_5)^T$ удовлетворяет (4), $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_5)^T$ удовлетворяет сопряженной системе:

$$\begin{gathered}
\dot{\psi}_1 = -4cos\ u\psi_3 - 4sin\ u\psi_4 + (4x_1cos\ u + 4x_2sin\ u - 6(t-1)cos\ 2u)\psi_5,\\
\dot{\psi}_2 = 4sin\ u\psi_3 + 4cos\ u\psi_4 - (4x_2cos\ u - 4x_1sin\ u + 6(t-1)sin\ 2u)\psi_5,\\
\dot{\psi}_3 = 4cos\ u\psi_5,\\
\dot{\psi}_4 = 4sin\ u\psi_5,\\
\dot{\psi}_5 = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

и условиям трансверсальности:

$$\psi_1\Big(1-\frac{1}{M}\Big) = 1,\ \psi_3\Big(1-\frac{1}{M}\Big) = \mu,\ \psi_5\Big(1-\frac{1}{M}\Big) = \nu,\ \psi_2\Big(1-\frac{1}{M}\Big) = \psi_4\Big(1-\frac{1}{M}\Big) = 0. \tag{8}$$

Оптимальная функция управления u^*, соответствующая экстремальной функции f^* в (5) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина[11]:

$$\max_u H(t, x^*, \psi^*, u) = H(t, x^*, \psi^*, u^*),\ 0 \le t \le 1 - \frac{1}{M}, \tag{9}$$

где (x^*, ψ^*) является решением (4) и (7) при $u = u^*$ в их правых частях.
Для формулировки основной теоремы в работе рассматриваются вспомогательные леммы и теоремы, одна из них

Теорема 1. Пусть $(\mu, \nu) \in D(M)$, где $D(M)$ - максимальная область в плоскости (μ, ν), являющаяся звёздной относительно начала и:

- $H(t, u)$ как функция $y = cos\ u$ достигает своего максимума на $[-1, 1]$ только при $y = -1$ для всех $t \in [0, 1 - 1/M]$
- $H_{uu}(t, \pi) \neq 0,\ 0 \leq t \leq 1 - 1/M.$

Если P_M локально максимизирует $Re\ L(\mu, \nu; f)$ в $S(M)$, то

$$F_{pp}(0,0) \leq 0,\ F_{pp}(0,0)F_{qq}(0,0) - F_{pq}^2(0,0) \geq 0.$$

Справедливо и обратное.

Пусть $F:\ (p,q) \to x_1(1-1/M) + \mu x_3(1-1/M) + \nu x_5(1-1/M)$. Вычислим u_p и u_q в $(0,0)$ для оценки частных производных функции F в $(0,0)$:

$$u_p = \frac{((3-5t-4/M)\nu+\mu)2y_4 + 2\nu y_5 - y_6}{16\nu t^2 - 4t(2\nu + 4\nu/M - \mu) + 2\nu + 1 - 4(2\nu+\mu)/M + 15\nu/M^2}, \quad (10)$$

$$u_q = \frac{((3-5t-4/M)\nu+\mu)2y_{10} + 2\nu y_{11} - y_{12} + 2(1-3t)}{16\nu t^2 - 4t(2\nu + 4\nu/M - \mu) + 2\nu + 1 - 4(2\nu+\mu)/M + 15\nu/M^2}, \quad (11)$$

где $y_4 := (x_2)_p,\ y_5 := (x_4)_p,\ y_6 := (\psi_2)_p,\ y_{10} := (x_2)_q,\ y_{11} := (x_4)_q,\ y_{12} := (\psi_2)_q$.

Пусть $y_1 := (x_1)_{pp},\ y_2 := (x_3)_{pp},\ y_3 := (x_5)_{pp},\ y_7 := (x_1)_{qq},\ y_8 := (x_3)_{qq},\ y_9 := (x_5)_{qq},\ y_{13} := (x_1)_{pq},\ y_{14} := (x_3)_{pq},\ y_{15} := (x_5)_{pq}$. С помощью дифференцирования уравнений из (4) и (7) при $u = \pi,\ x_2 = x_4 = \psi_2 = \psi_4 = (x_1)_p = (x_3)_p = 0$ получим систему:

$$\dot{y}_1 = -2u_p^2,\ y_1(0) = 0, \quad (12)$$

$$\dot{y}_2 = 4(y_1 + 2y_4u_p - 2(2t-1)u_p^2),\ y_2(0) = 0, \quad (13)$$

$$\dot{y}_3 = 2(7t-3)y_1 + 4y_2 - 4y_4^2 + 8(5t-3)y_4u_p + 8y_5u_p - 2(47t^2-46t+9)u_p^2,\ y_3(0) = 0. \quad (14)$$

$$\dot{y}_4 = -2u_p,\ y_4(0) = 0, \quad (15)$$

$$\dot{y}_5 = 4(y_4 + (1-3t)u_p),\ y_5(0) = 0, \quad (16)$$

$$\dot{y}_6 = -4\nu((t + 1 - \frac{4}{M})u_p + y_4) - 4\mu u_p,\ y_6(0) = 1. \tag{17}$$

$$\dot{y}_7 = -2u_q^2,\ y_7(0) = 0, \tag{18}$$

$$\dot{y}_8 = 4(y_7 + 2y_{10}u_q - 2(2t - 1)u_q^2),\ y_8(0) = 0, \tag{19}$$

$$\dot{y}_9 = 2(7t{-}3)y_7{+}4y_8{-}4y_{10}^2{+}8(5t{-}3)y_{10}u_q{+}8y_{11}u_q{-}2(47t^2{-}46t{+}9)u_q^2,\ y_9(0) = 0. \tag{20}$$

$$\dot{y}_{10} = -2u_q,\ y_{10}(0) = 0, \tag{21}$$

$$\dot{y}_{11} = 4(y_{10} + (1 - 3t)u_q),\ y_{11}(0) = 0, \tag{22}$$

$$\dot{y}_{12} = -4\nu((t + 1 - \frac{4}{M})u_q + y_{10}) - 4\mu u_q,\ y_{12}(0) = 0. \tag{23}$$

$$\dot{y}_{13} = -2u_p u_q,\ y_{13}(0) = 0, \tag{24}$$

$$\dot{y}_{14} = 4(y_{13} + y_4 u_q + y_{10}u_p) - 8(2t - 1)u_p u_q,\ y_{14}(0) = 0, \tag{25}$$

$$\dot{y}_{15} = 2(7t - 3)y_{13} + 4y_{14} - 4y_4 y_{10} + 4(5t - 3)(y_4 u_q + y_{10}u_p) + 4y_5 u_q + 4y_{11}u_p -$$

$$-2(47t^2 - 46t + 9)u_p u_q,\ y_{15}(0) = 0. \tag{26}$$

Теорема 2. Пусть $(\mu, \nu) \in D(M)$ и $y_1(t), \ldots y_6(t),\ 0 \le t \le 1{-}1/M$ - решения задачи Коши для системы (12-17). Тогда справедливо равенство:

$$F_{pp}(0, 0) = y_1(1 - 1/M) + \mu y_2(1 - 1/M) + \nu y_3(1 - 1/M)$$

Теорема 3. Пусть $(\mu, \nu) \in D(M)$ и $y_7(t), \ldots y_{12}(t),\ 0 \le t \le 1{-}1/M$ - решения задачи Коши для системы (18-23). Тогда справедливо равенство:

$$F_{qq}(0, 0) = y_7(1 - 1/M) + \mu y_8(1 - 1/M) + \nu y_9(1 - 1/M).$$

Пусть $y_4(t), y_5(t), y_6(t)$ и $y_{13}(t), y_{14}(t), y_{15}(t),\ 0 \le t \le 1 - 1/M$ - решения задачи Коши для систем (15-17) и (24-26) соответственно. Тогда справедливо равенство:

$$F_{pq}(0, 0) = y_{13}(1 - 1/M) + \mu y_{14}(1 - 1/M) + \nu y_{15}(1 - 1/M).$$

Согласно теореме 1, число Bombieri σ_{42} находится следующим образом

$$-\inf\{\nu' : F_{pp}(0,0) < 0,\ F_{pp}(0,0)F_{qq}(0,0) - F^2_{pq}(0,0) > 0 \,\forall\, \mu = 0,$$

$$M = \infty,\ \nu \in [\nu', 0]\}.$$

Теоремы 2 и 3 сводят задачу к решению уравнений

$$y_1(1) + \nu y_3(1) = 0, \tag{29}$$

$$(y_1(1) + \nu y_3(1))(y_7(1) + \nu y_9(1)) - (y_{13}(1) + \nu y_5(1))^2 = 0, \tag{30}$$

где $y_1(t), \dots y_{15}(t)$ являются решениями задачи Коши для системы (12-26) с $\mu = 0$ и $M = \infty$.

Теорема 4.[3] Число Bombieri $\sigma_{42} = 0.050057\dots$ и это значение является максимальным отрицательным корнем уравнения (30) умноженным на (-1), где $y_1(t), \dots y_{15}(t)$ - решения системы (12-26) для $\mu = 0$ и $M = \infty$.

Данная теорема сформулирована на основе численного эксперимента. В работе приведён численный алгоритм решения задачи нахождения числа Bombieri σ_{42}.

Заключение. В ходе выполнения этой работы были изучены:

- сходимость областей к ядру;
- равномерная сходимость функций;
- семейства областей;
- дифференцируемость отображений по параметру.

При решении задачи был применен метод оптимального управления, в основе которого лежит теория Лёвнера, описанная в первой главе работы. На основе этого метода изучен алгоритм нахождения числа Bombieri σ_{42}, который сформулирован в основной теореме 9.

С помощью программного пакета Maple разработано численное решение задачи нахождения числа Bombieri

$$\sigma_{42} = \lim_{f \to K, f \in S} \inf \frac{2 - Re\ a_2}{4 - Re\ a_4}.$$

А именно:

- найдено $\sigma_{42} = 0.050057\ldots$
- рассмотрено поведение функций F_{pp} и $F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2$
- приведены примеры значений ν, для которых выполняются условия:
    1. $F_{pp}(0,0) < 0$,
    2. $F_{pp}(0,0)F_{qq}(0,0) - F_{pq}^2(0,0) > 0$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Bombieri,E. On the local maximum property of the Koebe function/E.Bombieri// Inv. Math. 4.1967. S. 26-67.

2 Greiner,R., Roth,0. On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri/R. Greiner, 0. Roth// Proc. Amer. Math. Soc. 129.2001. no. 12, S. 3657-3664.

3 Prokhorov,D.V., Vasil'ev,A.Yu. Optimal control in Bombieri's and Tammi's conjectures/D.V.Prokhorov, A.Yu.Vasil'ev// Georgian Math.J.12(4),743-761.2005.

4 Pick,G. *Ü*ber die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschr*ä*nktes Gebiet/G. Pick// S.-B. Kaiser!. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. K1. Abt. II a 126. 1917. S. 247-263.

5 Schaeffer,A. C., Spencer, D. C. The coefficients of schlicht functions/A. C. Schaeffer, D. C. Spencer// II 12. 1945. S. 107-125.

6 Tammi,0. On the maximalization of the coefficient a3 of bounded schlicht functions/0. Tammi// Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys. 1953. no. 149, S. 1-14.

7 Schiffer,M., Tammi,0. On the fourth coefficient of bounded univalent functions/M. Schiffer, 0. Tammi//Trans. Amer. Math. Soc. 119.1965. S. 67-78.

8 Tammi,0. Extremum problems for bounded univalent functions/0. Tammi// Lecture Notes in Mathematics, 646. Springer-Verlag, Berlin-New York. 1978.

9 Lowner,K. Untersuchungen *ü*ber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises/K. LOwner// Math. Ann. 89. 1923. S. 103-121.

10 Александров, И. А. Параметричекие продолжения в теории однолистных функций/И. А.Александров. Наука, Москва, 1976. С. 11-16.

11 Болтянский, В.Г.Математические методы оптимального управления/В.Г.Болтянский. Москва, 1966. С 10-50.

12 Bieberbach,L. *Ü*ber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheit-skreises vermitteln/L.Bieberbach// S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S.940-955.

13 de Branges,L. A proof of the Bieberbach conjecture/L. de Branges// LOMI Preprints E-5-84. 1984. P.1-21.

14 de Branges,L. A proof of the Bieberbach conjecture/L. de Branges// Acta Math. 154. 1985. no. 1-2. P. 137-152.

15 Bshouty,D., Hengartner,W. A variation of the Koebe mapping in a dense subset of S/D. Bshouty, W. flengartner// Canad. J. Math. 39. 1987. no. 7. P. 54-73.

16 Куфарев, П.П. Об однопараметрических семействах аналитических функций/П.П.Куфарев//Матем.сб.13. 1943. С.55.

17 Гутлянский, В.Я. Параметрическое представление однолистных функций/В.Я.Гутлянский//ДАН СССР 194. 1970. С. 750-753.

18 Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций/А.И.Маркушевич. М.: Гостехиздат, 1950.

19 Caratheodory, C.Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veranderlichen Gebieten/C.Caratheodory//Math. Ann. 72. 1912. S. 107-144.

20 Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного/Г.М. Голузин//Наука, 2-е издание. 1966. С. 29.

21 Голузин, Г.М. Некоторые вопросы теории однолистных функций/Г.М. Голузин//Тр. Матем. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР 27. 1949. С. 51-56.

22 Хейман, В,К. Многолистные функции/В.К.Хейман. М.: ИЛ, 1960.

23 Pёschl, E. Zur Theorie der schliichten Funktionen/E.Pёschl//T. f. reine u. angew. Math. 176. 1936. S. 61-96.

24 Федорова, В.С. Об обобщённом уравнении Лёвнера/В.С.Федорова//Учен. зап. Томского ун-та 4. 1947. С. 19-24.

25 Федорова, В.С. Об одном частном виде уравнения $\dfrac{\partial\Phi(\omega,t)}{\partial t} + \omega\sum_{k=1}^{n}\delta_{k(t)}\dfrac{\mu_k(t)+\omega}{\mu_k(t)-\omega}\dfrac{\partial\Phi(\omega,t)}{\partial\omega} = 0$/В.С.Федорова//Учен. зап. Томского пед. ин-та 6. 1950. С. 63-71.

26 Петровский, Н.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений/Н.Г. Петровский. Наука, 1970. С. 279.

27 Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения/Л.С. Понтрягин. Наука, 1982. С. 328.