Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа
наименование кафедры

Построение базиса в пространстве сплайнов

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Потапова Романа Владимировича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Матвеева Ю.В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н.		Прохоров Д.В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Простейшая физическая интерпретация сплайна - лекала чертёжника. На протяжении многих лет для построения плавных кривых через заданные точки люди использовали тонкие рейки из дерева, металла. На эти рейки в определённых местах устанавливаются грузила, таким образом, подбирая правильное количество грузил и их взаиморасположение на рейке, удаётся достичь того, чтобы сплайн прошёл через заранее размеченные точки.

Зарождение теории интерполяции сплайнами и сам термин соотносятся со статьёй Айзека Шёнберга 1946 года. Интенсивное развитие теория получила в 50-70 годах. Среди тех, кто активно занимался ей, конечно был Шёнберг, его ученик Уитни, также важные труды в этой области были созданы Альбергом, Нильсоном, Уолшем.

Аппроксимация функций сплайнами широко используется в вычислительной математике и приложениях. Особенно распространены и исследованы полиномиальные сплайны. Для функций, заданных на сетке, нетрудно построить интерполяционные сплайны, однако при этом возникают следующие проблемы.

Во-первых, традиционный способ построения интерполяционных сплайнов требует искусственного задания граничных условий. Неудачное их задание может понизить порядок точности.

Во-вторых, для сплайнов с искусственными граничными условиями известен метод построения устойчивых алгоритмов для нахождения коэффициентов. Но в этом случае для каждой степени сплайна строится свой алгоритм. Сложность таких алгоритмов быстро возрастает с увеличением степени сплайна. Поэтому степени выше 3 практически не используют. Кубический же сплайн имеет негладкую вторую производную, что нежелательно для ряда приложений.

В 1972 г. Кокс и де Бор предложили использовать B-сплайны. На их основе построен простой универсальный алгоритм наилучшей среднеквадратичной аппроксимации сплайнами произвольной степени. Он обладает хорошей устойчивостью, позволяет использовать высокие степени сплайна при большом числе узлов, и обеспечивает высокую точность аппроксимации.

Функции B-сплайнов широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, B-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, B-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома B-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями); во-вторых, B-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является большая сложность B-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

Целью данной работы является изучение свойств B-сплайнов, построение пространства сплайнов и базиса в пространстве сплайнов.

В связи с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

1) дать основные определения, в частности, определения разделённой разности и B-сплайна
2) сформулировать и доказать свойства разделённых разностей и B-сплайнов
3) описать пространство сплайнов
4) сформулировать и доказать теорему о базисе пространства сплайнов
5) указать метод разложения кусочно-многочленной функции по базису
6) решить практическую задачу разложения кусочно-многочленной функции по базису в пространстве B-сплайнов, используя язык $C++$.

Работа состоит из введения; раздела с определениями; основной части, она состоит из 5 разделов, которые имеют разделения на пункты; заключения; списка использованных литературных источников; приложения.

В первом разделе „Сплайн. Пространство сплайнов“ приводятся некоторые базовые определения, касающиеся полиномиальных сплайнов, описывается пространство сплайнов.

Во втором разделе „Разделённые разности“ есть два пункта. В первом „Понятие разделённой разности“ формулируется определение разделённых разностей разных порядков. Во втором „Свойства разделённых разностей“ формулируются и доказываются некоторые свойства разделённых разностей.

В третьем разделе „B-сплайны и их свойства“ также идёт деление на два пункта. В первом „Понятие B-сплайна“ приводится определение B-сплайна и связанного с ним определения усечённой степенной функции. Во втором „Свойства B-сплайнов“ приводятся и доказываются некоторые свойства B-сплайнов.

В четвёртом разделе „Базис в пространстве сплайнов“ в пункте „Пространства $\mathbb{P}_{k,\xi}$ и $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$“ даются некоторые определения, доказываются вспомогательные теоремы, описываются соответствующие пространства, а в пункте „Теорема Карри-Шёнберга“ даётся объяснение смысла теоремы Карри-Шёнберга, приводится сама теорема и её доказательство.

В пятом разделе „Разложение кусочно-многочленной функции по базису из B-сплайнов“ присутствует три пункта. В первом „Общий случай“ приводится алгоритм для общего случая разложения. Во втором „Частный случай“ – для случая системы с простыми узлами. В третьем „Практическое задание“ приводятся элементы решения практической задачи разложения кусочно-многочленной функции по базису в пространстве B-сплайнов и результаты выполнения задания.

В приложении содержится полный программный код для решения поставленной задачи на языке $C++$.

Основное содержание работы. Обобщением понятия производной является понятие разделённой разности.

Определение 2.1. Пусть функция f задана на множестве X и зафиксированы попарно различные точки $x_0, ..., x_n \in X$. *Разделённой разностью нулевого порядка* функции f в точке x_j называют значение $f(x_j)$, *разделённая разность первого порядка* определяется равенством

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

разность второго порядка равенством

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i},$$

наконец, *разделённая разность порядка k* для системы точек $x_1, ..., x_k$ получается по формуле

$$f(x_1; ...; x_k) = \frac{f(x_2; ...; x_k) - f(x_1; ...; x_{k-1})}{x_k - x_1}. \tag{1}$$

В работе приведены и доказаны следующие свойства разделённых разностей, сформулированные в виде лемм.

Лемма 2.1. Справедливо равенство

$$f(x_1; ...; x_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} (x_j - x_i)}. \tag{2}$$

Лемма 2.2. Разделённая разность является линейным оператором от функции f:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_1; ...; x_k) = \alpha_1 f_1(x_1; ...; x_k) + \alpha_2 f_2(x_1; ...; x_k).$$

Лемма 2.3. Разделённая разность есть симметрическая функция своих аргументов $x_1, ..., x_k$ (то есть не меняется при любой их перестановке).

Лемма 2.4. Если $f(x)$ – многочлен степени n, то его разделённые разности порядка $n+1$ равны нулю.

Лемма 2.5. Разделённая разность $f(x_0; x_1; ...; x_n)$ – есть коэффициент при x^n для многочлена n-ой степени, который интерполирует функцию f в узлах сетки $x_0, x_1, ..., x_n$.

Лемма 2.6. Разделённая разность $f(x_0; x_1; ...; x_n)$ порядка n для функции f единственна.

Лемма 2.7. Если $f(x) = g(x)h(x)$ для всех x, то

$$f(x_0; ...; x_n) = \sum_{k=0}^{n} g(x_0; ...; x_k)h(x_k; ...; x_n).$$

Это равенство называется формулой Лейбница.

Лемма 2.8. Пусть дана $\underbrace{x_i, ..., x_i}_{p+1}$ – система кратных узлов. Тогда разделённая разность $f(x_i; ...; x_i)$ вычисляется по формуле:

$$f(\underbrace{x_i, ..., x_i}_{p+1}) = \frac{f^{(p)}(x_i)}{p!}.$$

Лемма 2.9. Пусть дана кратная система узлов $(x_j, m_j)_{j=0}^s$. Тогда

$$f(x_0; ...; x_0; ...; x_s; ...; x_s) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} \alpha_{i,j} f^{(j)}(x_i),$$

причём коэффициенты $\alpha_{i,j}$ зависят только от системы узлов $(x_j, m_j)_{j=0}^s$ и не зависят от функции f.

Для неубывающей последовательности точек $\tau = (\tau_i)_1^n$ и для достаточно гладкой функции g определяем вектор $g|_\tau$, который будет n-мерным числовым вектором $(g_i)_1^n$, заданным как

$$g_i = g^{(r)}(\tau_i),\ r = \max\{j : \tau_{i-j} = \tau_i\}.$$

Лемма 2.10. Пусть $\tau = (\tau_i)_1^n$ – неубывающая последовательность точек. Для любых $1 \le r \le s \le n$ существуют константы $(d_i)_1^n$, зависящие от g, такие, что

$$g(\tau_r; ...; \tau_s) = \sum_{i=1}^{n} d_i g_i. \tag{3}$$

Разобрав определение и свойства разделённых разностей, можно приступить к изучению B-сплайнов. Сформулируем определение B-сплайна.

Определение 3.1. Пусть $(x_j)_{j \in J}$ – произвольная система узлов, конечная или бесконечная, $k \in \mathbb{N}$ – фиксированное число. Выберем $z \in \mathbb{R}$ и зафиксируем. Положим по определению

$$\varphi_z = \varphi_{z,k}(x) = (x - z)_+^{k-1} = \begin{cases} (x - z)^{k-1}, & z \le x, \\ 0, & z > x. \end{cases}$$

Функцию $\varphi_z(x)$ называют *усечённой степенной функцией.*

Определение 3.3. Пусть $(x_j)_{j\in J}$ – произвольная система узлов, конечная или бесконечная, возможно с кратными узлами, пусть $k \in \mathbb{N}$ – фиксированное число. Для каждого $i \in J$, для которого $i+k \in J$, определим функцию

$$b_{i,k}(z) = b_i(z) = (x_{i+k} - x_i)\varphi_z(x_i; ...; x_{i+k}) = (x_{i+k} - x_i)\sum_{s=i}^{i+k} \frac{(x_s - z)_+^{k-1}}{\prod\limits_{l\neq s}(x_s - x_l)}, \quad (4)$$

где

$$l = i, i+1, ..., i+k.$$

Функция $b_i(z)$ называется *нормированным B-сплайном порядка k* (степени $(k-1)$) относительно узлов $x_i, ..., x_{i+k}$.

Под B-сплайнами будем понимать именно нормированные B-сплайны, так как рассматриваться будут только они.

В работе приведены и доказаны следующие свойства B-сплайнов, сформулированные в виде лемм.

Лемма 3.1. $b_i(z) \equiv 0$ вне интервала (x_i, x_{i+k}).

Лемма 3.2.

$$b_{i,k}(z) = (z - x_i)\frac{b_{i,k-1}(z)}{x_{i+k-1} - x_i} + (x_{i+k} - z)\frac{b_{i+1,k-1}(z)}{x_{i+k} - x_{i+1}}. \quad (5)$$

Лемма 3.3. При $k = 1$, то есть для системы x_i, x_{i+1}

$$b_{i,1}(z) = (x_{i+1} - x_i)\cdot\varphi_{z,1}(x_i; x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & z \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & z \notin (x_i, x_{i+1}). \end{cases} \quad (6)$$

Лемма 3.4. $\forall x \in (x_j, x_{j+1}) \quad (j = i, ..., s) \quad b_i(z)$ есть многочлен степени $k-1$.

Лемма 3.5. $b_i(z) > 0, \quad \forall z \in (x_i, x_{i+k})$.

Лемма 3.6. $b_i(z)$ имеет ровно k интервалов вида (x_j, x_{j+1}):

$$(x_i, x_{i+1}), ..., (x_{i+k-1}, x_{i+k}),$$

на которых $b_i(z) \neq 0$.

Лемма 3.7. На каждом интервале (x_i, x_{i+1}) существует ровно k B-сплайнов $b_{i-k+1}, b_{i-k+2}, ..., b_i$, отличных от нуля.

Лемма 3.8. $\forall z \in (x_r, x_s) \qquad \sum\limits_{i \in J} b_i(z) = \sum\limits_{i=r+1-k}^{s-1} b_i(z) = 1,$ J-множество коэффициентов соответствующей системы узлов.

Лемма 3.9. Пусть $(x_i, m_i), ..., (x_{i+s}, m_{i+s})$ – кратная система узлов $m_i + ... + m_{i+s} = k+1$, где $\nu_j = k - m_j$ при $j = i+1, ..., i+s-1$. Тогда B-сплайн $b_{i,k}(z)$ в точках x_j имеет непрерывные производные до порядка $\nu_j - 1$ включительно, а производная порядка ν_j имеет разрыв.

В работе также приведены следующие факты и рассуждения, которые потребуются в дальнейшем для формулировки и доказательства теоремы о базисе в пространстве сплайнов. Все леммы и теоремы приведены в работе с доказательством.

Определение 4.1. Пусть $x = (x_i)_1^n$ – последовательность точек, не обязательно различных. Говорят, что функция p согласуется с функцией g на x, если в каждой точке последовательности x, которая встречается m раз в последовательности $x_1, ..., x_n$, p и g согласуются m-кратно на x, то есть

$$p^{(i-1)}(x) = g^{(i-1)}(x), \qquad i = 1, ..., m.$$

Теорема 4.1. Если $g \in \mathbb{C}^{(n)}$, то есть если g имеет n непрерывных производных, и $x = (x_i)_1^n$ – последовательность n произвольных точек (не обязательно различных), то для всех x

$$g(z) = p_n(z) + (z - x_1) \cdot ... \cdot (z - x_n) g(x_1; ...; x_n; z), \tag{7}$$

где

$$p_n(z) = \sum_{i=1}^{n} (z - x_1) \cdot ... \cdot (z - x_{i-1}) g(x_1; ...; x_i). \tag{8}$$

В частности, p_n – единственный многочлен порядка n, который согласуется с g на последовательности x.

В дальнейшем будем считать, что две кусочно-многочленные функции согласуются, если они состоят из одних и тех же многочленных частей и имеют разрывы в одних и тех же точках. Конечно, если один из соответствующих многочленов непрерывен справа, а другой непрерывен слева, то они могут не согласовываться в точках разрывов. Будем, тем не менее, считать их идентичными кусочно-многочленными функциями.

Обозначим совокупность всех таких кусочно-многочленных функций порядка k с последовательностью точек разрыва $\xi = (\xi_i)_1^{l+1}$ через $\mathbb{P}_{k,\xi}$.

Определение 4.2. $D^j f$ – j-я производная кусочно-многочленной функции f – кусочно-многочленная функция $k-j$-го порядка с той же самой последовательностью точек разрыва, образованной из j-х производных многочленных частей, из которых состоит f.

Типичная проблема вычисления кусочно-многочленных функций может быть сформулирована следующим образом: имеется информация о некоторой функции g и требуется построить конкретную функцию f из пространства $\mathbb{P}_{k,\xi}$, которая удовлетворяла бы тем же условиям, что и g. Кроме того, функция f должна иметь определённое число непрерывных производных. С учётом этих последних условий гладкости можно построить подпространства $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$ пространства $\mathbb{P}_{k,\xi}$.

Согласно обычным условиям однородности требуется, чтобы получаемая кусочно-многочленная функция $f \in \mathbb{P}_{k,\xi}$ имела определённое число непрерывных производных. Запишем эти условия в виде

$$jump_{\xi_i} D^{j-1} f = 0, \qquad j = 1, ..., \nu_i; \qquad i = 2, ..., l, \tag{9}$$

для некоторого вектора $\nu = (\nu_i)_2^l$, состоящего из неотрицательных чисел. Компонента ν_i вектора ν обозначает число условий непрерывности, которые должны выполняться в точке ξ_i. В частности, $\nu_i = 0$ означает, что вообще не вводятся условия непрерывности в точке ξ_i.Линейный функционал

$$jump_\alpha f = f(\alpha^+) - f(\alpha^-)$$

означает скачок функции f в точке α.

Поскольку условия (9) линейны и однородны, то подмножество всех функций $f \in \mathbb{P}_{k,\xi}$, удовлетворяющих (9) для заданного вектора ν, является линейным подпространством пространства $\mathbb{P}_{k,\xi}$. Обозначим это подпространство через $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$.

Определение 4.3. *Сплайн-функция порядка k с последовательностью узлов x* есть любая линейная комбинация B-сплайнов порядка k для последовательности узлов x. Множество всех таких функций обозначается через $\$_{k,x}$:

$$\$_{k,x} = \left\{ \sum_i \alpha_i b_{i,k} : \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \right\}.$$

Для построения базиса в пространстве сплайнов ключевой является теорема Карри-Шёнберга. Она позволяет строить базис из B-сплайнов для любого пространства кусочно-многочленных функций $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$ и даёт правило выбора подходящей последовательности узлов x. Такой выбор x позволяет связать желаемую степень гладкости в каждой точке разрыва (в соответствии с индексом ν) с чсилом узлов в этой точке; при этом меньшее число узлов соответствует большему числу условий непрерывности и всегда число условий непрерывности в точке ξ в сумме с числом узлов в точке ξ даёт k.
Поэтому k-кратный узел в точке соответствует отсутствию условий непрерывности вообще, а в другом крайнем случае отсутствие узлов в точке равносильно k условиям непрерывности, то есть две многочленные части, соприкасающиеся в этой точке, должны быть тождественно согласованы. В дополнение к этим

$$\sum_{i=2}^{l} (k - \nu_i)$$

(внутренним) узлам

$$\xi_2 \leq x_{k+1} \leq ... \leq x_n \leq \xi_l$$

имеется ещё k начальных и k конечных узлов, которые выбираются произвольно, но при условии, что они не должны лежать внутри интервала $[\xi_1, \xi_{l+1}]$.

Теорема 4.3. Система функций $\varphi_{i,j}(x)$, определённая равенствами

$$\begin{gathered}\varphi_{i,1}(x) = \tfrac{(x-\xi_1)^i}{i!}\ (i = 0, ..., k-1),\\ \varphi_{i,j}(x) = \tfrac{(x-\xi_j)_+^i}{i!}\ (i = 0, ..., k-1;\ j = 2, ..., s),\end{gathered} \tag{10}$$

образует базис пространства $\mathbb{P}_{k,\xi}$.

Таким образом, размерность пространства $\mathbb{P}_{k,\xi}$ равна $k \cdot s$.

Функции $\varphi_{i,j}(x)$, определённые равенствами (10) для $i = \nu_j, .., k-1$ ($j \geq 2$), образуют базис пространства $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$, а размерность пространства $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$ равна $k + \sum\limits_{j=2}^{s} (k - \nu_j)$.

Теорема 4.5 (Карри-Шёнберг)**.** Для данной строго возрастающей последовательности $\xi = (\xi_i)_1^{l+1}$ и для данной последовательности неотрицательных целых чисел $\nu = (\nu_i)_2^l$, где $\nu_i \leq k$ для всех i, положим

$$n = k + \sum_{i=2}^{l} (k - \nu_i) = kl - \sum_{i=2}^{l} \nu_i = dim\mathbb{P}_{k,\xi,\nu},$$

и пусть $x = (x_i)_1^{n+k}$ – любая неубывающая последовательность такая, что

1) $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k \leq \xi_1$ и $\xi_{l+1} \leq x_{n+1} \leq ... \leq x_{n+k}$.
2) Для $i = 2, ..., l$ число ξ_i встречается точно $(k - \nu_i)$ раз в последовательности x.

Тогда последовательность $b_1, ..., b_n$ из B-сплайнов порядка k для последовательности узлов x есть базис пространства $\mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$. При этом $b_1, ..., b_n$ – функции, заданные на интервале $[x_k, x_{n+1}]$. В символьном обозначении это запишется как

$\$_{k,x} = \mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$ на интервале $[x_k, x_{n+1}]$.

Перейдём теперь к методам разложения кусочно-многочленной функции по базису из B-сплайнов.

Рассмотрим общий случай. Пусть дана система узлов $(\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{s+1}) = \xi$ и функция $f \in \mathbb{P}_{k,\xi,\nu}$ $(\nu = (\nu_2, ..., \nu_s), \nu_j < k)$. Как найти представление f в виде

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_{i,k}(z)? \tag{11}$$

Запишем алгоритм нахождения коэффициентов c_i:

1) Вычисляем кратности $m_j = k - \nu_j$ $(j = 2, 3, ..., s)$.
2) Дополняем систему

$$\xi_1 < (\xi_2, m_2) < ... < (\xi_s, m_s) < \xi_{s+1}$$

до системы

$$x_1 \leq ... \leq x_k = \xi_1 < (\xi_2, m_2) < ... < (\xi_s, m_s) < \xi_{s+1} = x_{k+1} \leq ... \leq x_{n+k}$$

и обозначаем узлы полученной системы через $(x_j)_{j=1}^{n+k}$, где $n = k + \sum\limits_{j=2}^{s} m_s$.
3) Строим функции $b_{i,k}(z) = (x_{i+k} - x_k)\varphi_{x,k}(x_i; ...; x_{i+k})$, то есть пишем процедуру, которая вычисляет функции $b_{i,k}(z)$.
4) Задаём функции

$$\psi_i(z) = \frac{(x_{i+1} - z)...(x_{i+k-1} - z)}{(k-1)!}$$

и пишем процедуру вычисления $\psi_i(z)$ и их производных.
5) Определяем функционалы

$$\lambda_i(f) = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-1-r} \psi^{(k-1-r)}(\tau_i) f^{(r)}(\tau_i) \ (\tau_i \in (x_i, x_{i+k})).$$

Согласно теореме Карри-Шёнберга $\lambda_i(b_j) = \delta_{ij}$. Поэтому если f имеет представление (11), то

$$c_i = \lambda_i(f),$$

причём числа τ_i можно выбирать любыми из интервала (x_i, x_{i+k}). В частности, можно выбирать

$$\tau_i = \min\,(x_j : x_j > x_i).$$

Перейдём к практическому заданию. Задана функция

$$f(x) = x \cdot \cos(x),\ \ x \in [0, 3] \tag{12}$$

и система узлов $\{0; 0.5; 0.9; 1.4; 2.1; 2.7; 3\} = \{x_i\}$. Необходимо реализовать на $C++$ алгоритм представления функции с помощью B-сплайнов, предложенный в теореме Карри-Шёнберга, и визуально оценить точность такого приближения.

Решение.

Пусть $k = 3$. Дополним систему узлов кратными узлами до расширенной системы в соответствии с теоремой Карри-Шёнберга, получим новую систему: $\{t_i\} = \{0; 0; 0; 0.5; 0.9; 1.4; 2.1; 2.7; 3; 3; 3\}$.

В качестве более мелкой сетки возьмём разбиение отрезка $[0, 3]$ с шагом $0.05 : \{0; 0.05; 0.1; ...; 2.95; 3\}$ – на ней будут сравниваться значения, подсчитанные по формулам

$$f(z) = z \cdot \cos(z) \tag{13}$$

и

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_{i,k}(z). \tag{14}$$

Подставляем формулу (12), границы отрезка, количество отрезков разбиения более мелкой сетки, значение k и сетку t_i в программный код [ПРИЛОЖЕНИЕ А], выполняем его, получаем два набора вычисленных по формулам значений, максимальная погрешность равна 0.204831. Строим по полученным наборам графики

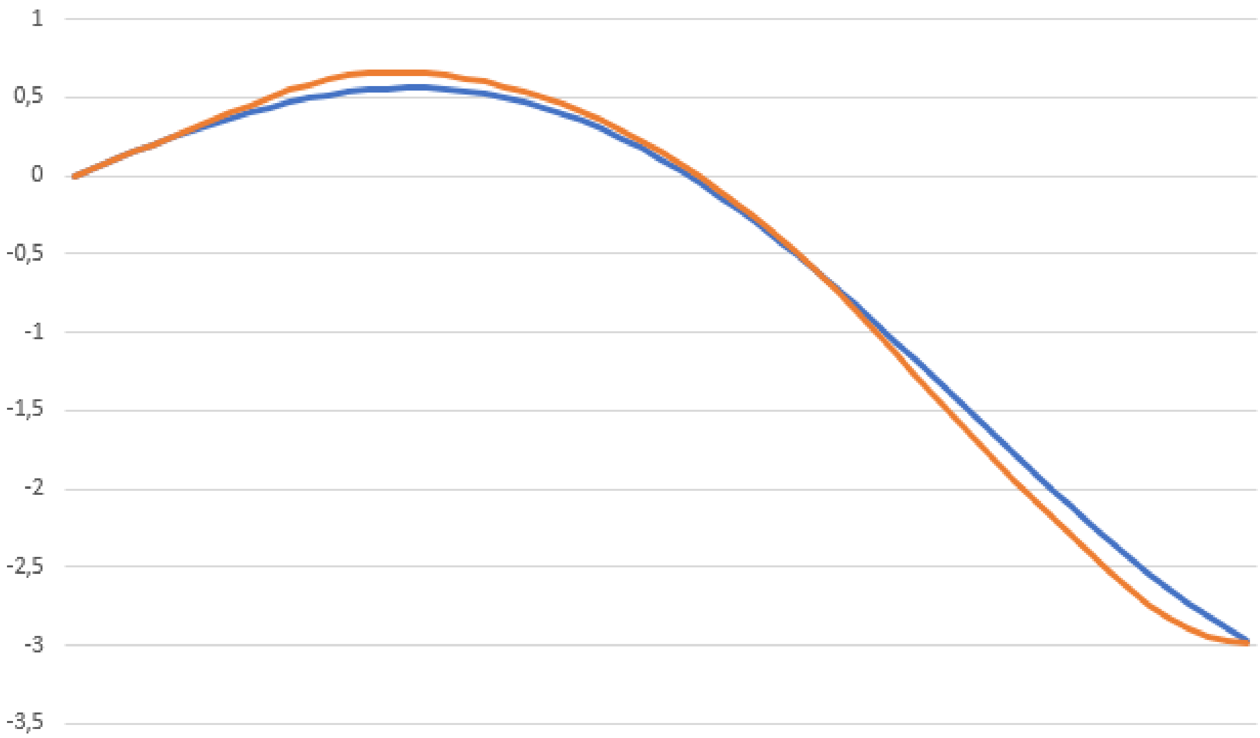

Рисунок 1 — Графики точной и приближенной функции.

Здесь, голубая кривая – график функции (13), оранжевая – график функции (14).

Заключение. В ходе выполнения работы были реализованы поставленные цели и задачи: даны основные определения, определения разделённой разности и B-сплайна; сформулированы и доказаны свойства разделённых разностей и B-сплайнов; дано описание пространства сплайнов; сформулирована и доказана теорема о базисе пространства сплайнов; указаны алгоритмы разложения кусочно-многочленной функции по базису; решена практическая задача разложения кусочно-многочленной функции по базису в пространстве B-сплайнов с использованием языка $C++$.

Рассмотренная в работе тема построения базиса в пространстве сплайнов и, в общем, тема B-сплайнов важна, так как она имеет применение при решении класса задач в математике и во многих её приложениях.