Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа
наименование кафедры

Частные случаи интегрирования уравнения Левнера

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Вежлева Арсения Евгеньевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. | | Е.В. Разумовская
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н. | | Д.В. Прохоров
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Алгебраическая структура множества однолистных функций, заданных в области G, оказывается довольно сложной. Простые примеры показывают, что это множество, например, нелинейно и невыпукло. Вместе с тем, свойство однолистности инвариантно относительно операции композиции надлежащих отображений, что позволяет выделить соответствующие полугруппы конформных отображений и применить для их изучения алгебраические методы. Именно это свойство было положено К. Лёвнером в 1923 году в основу разработанного им метода параметрических представлений однолистных аналитических функций. На этом пути прослеживаются глубокие связи между однолистными аналитическими функциями в единичном круге и функциями касса C – Каратеодори.

Левнер в [2] исследовал задачу о представлении произвольного отображения из полугруппы L в виде композиции преобразований, бесконечно близких к тождественному. Другими словами, он изучил возможность представления произвольного отображения φ из L в виде композиции инфинитезимальных преобразований полугруппы L, то есть как отображения вида

$$\varphi(z) = w(z, T, s; p), \tag{1}$$

где $w(t) = w(z, T, s; p)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -wp(s, t) \tag{2}$$

с начальным условием $w(s) = z, 0 \leq s \leq t \leq T < \infty$, и и однопараметрическим семейством $p(z, t)$ инфинитезимальных преобразований, таких что $p(\cdot, t) \in C$.

Уравнение (1) известно теперь как уравнение Левнера. Сам Левнер изучил детально лишь частный случай этого уравнения.

Основным объектом исследования обычно является класс S, состоящий из всех однолистных аналитических функций $f(z)$ в круге D, нормированных условиями $f(0) = 0, f^{'}(0) = 1$.

Уравнение Левнера генерирует подкласс $S(L)$ класса S, состоящий из конформных отображений круга на области, которые получаются из плоскости C удалением одного жорданового разреза, уходящего на бесконечность. С другой стороны, из простых геометрических соображений и теоремы Каратеодори о сходимости к ядру следует, что любая функция класса S может быть аппроксимирована, в топологии локально равномерной сходимости в круге D, последовательностью функций класса $S(L)$ [1].

Цель работы. Целью настоящей работы является рассмотрение уравнения Левнера и построение интегралов этого уравнения с частными случаями управляющей функции.

Объем и структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Первая глава – семейство областей Левнера, вторая глава называется уравнение Левнера. Третья глава – интегрирование уравнения Левнера с различными функциями управления. Третья глава состоит из трех разделов: уравнение Левнера с постоянной управляющей функцией, уравнение Левнера с управляющей функцией $\mu(\tau, \alpha, \beta) = e^{i(\alpha+\beta\tau)}$ и уравнение Левнера с кусочно-заданным управлением.

Краткое содержание работы.

Глава 1. В первой главе выпускной работы вводится семейство областей Левнера, доказываются леммы об одновременном стягивании дуг в одну и ту же точку при предельном переходе.

Зафиксируем область Δ с разрезом L, не проходящим через точку $z = 0$, принадлежащую этой области. Пусть $w = \varphi(\alpha)$ – параметрическое уравнение прямой L. Тогда $L = \{w : w = \varphi(\alpha), 0 \leq \alpha \leq \alpha_0\}$, где $\varphi(0) = B$ – внутренняя точка области Δ, $\varphi(\alpha_0) = A$ – точка границы Δ (рис. 1.1).

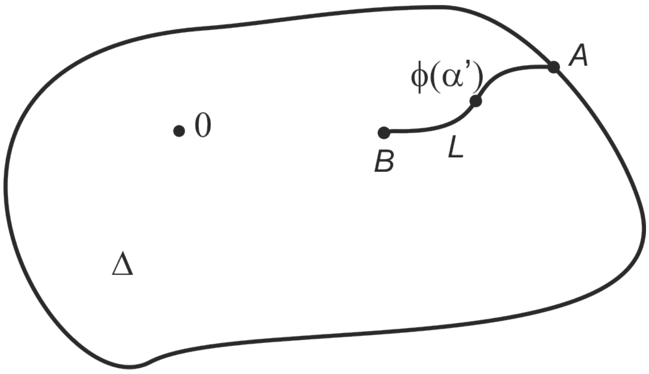

Рис. 1.1

Рассмотрим $L_{\alpha'} = \{w : w = \varphi(\alpha), \alpha' \leq \alpha \leq \alpha_0\}$ и введём семейство областей Δ_α, называемое семейством областей Левнера, $\Delta_\alpha = \Delta \backslash L_\alpha$, при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$.

Рассмотрим семейство аналитических функций $w = \psi(z, \alpha)$, однолистно отображающих круг $\{|z| < 1\}$ на Δ_α, причем $\psi(0, \alpha) = 0, \psi_z'(0, \alpha) > 0$. Тогда имеем разложение $\psi(z, \alpha) = \gamma_1(\alpha)z + \gamma_2(\alpha)z^2 + \ldots$ в $|z| < 1$. И рассмотрим обратные к ним функции $F(w, \alpha) = \psi^{-1}(z, \alpha)$ (рис. 1.2), которые однолистно отображают Δ_α на $\{|z| < 1\}, F(0, \alpha) = 0, F_w'(0, \alpha) > 0$ и имеют разложение в окрестности точки $w = 0$

$$F(w, \alpha) = \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} w + \ldots$$

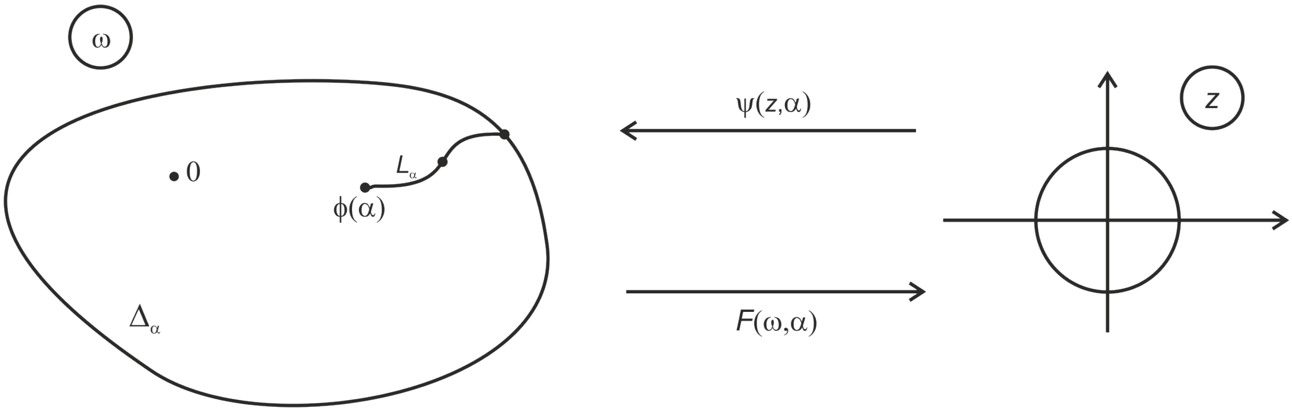

Рис. 1.2

Лемма 1. *Существует непрерывная замена переменных $\alpha = \alpha(t), \alpha, t \in \mathbb{R}$, такая, что $\gamma_1(\alpha) = e^t$.*

Лемма 2. *Если $t' \to t''$ или $t'' \to t'$, то $\Phi(z, t', t'') \to z$ равномерно на любом компактном подмножестве замкнутого единичного круга, не содер-*

жащем точку $M(t^{'},t^{'})$ (если $t^{'}$ – фиксированное) или точку A (если $t^{''}$ – фиксированное).

Лемма 3. *Если $t^{'}$ – фиксирована, а $t^{''} \to t^{'}$, то разрез $l(t^{'},t^{''})$ стягивается в некоторую точку M на единичной окружности.*

Лемма 4. *Если $t^{''}$ – фиксирована, а $t^{'} \to t^{''}$, то дуга $\breve{w_1 w_2} = \gamma(t^{'},t^{''})$ стягивается в точку M на единичной окружности.*

Глава 2. В этой главе рассматривается непосредственно уравнение Левнера. Здесь доказываются утверждения об удовлетворении функции обыкновенному дифференциальному уравнению, дифференциальному уравнению в частных производных и о задаче Коши для уравнения Левнера.

Теорема 1. *Функция $F(w,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Левнера*

$$\frac{dF(w,t)}{dt} = -F(w,t)\frac{1+e^{-i\mu}F(w,t)}{1-e^{-i\mu}F(w,t)}$$

Теорема 2. *Функция $\psi(z,t)$ удовлетворяет уравнению Левнера в частных производных*

$$\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t} = z\cdot\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}\cdot\frac{e^{i\mu}+z}{e^{i\mu}-z}$$

Теорема 3 (О задаче Коши для уравнения Левнера)**.** *Пусть функция $\mu = \mu(t)$ непрерывна при $t \in [0,+\infty)$. Тогда функция $\xi = \xi(z,t)$, которая является решением задачи Коши для дифференциального уравнения Левнера*

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\xi\dfrac{e^{i\mu(t)}+\xi}{e^{i\mu(t)}-\xi} \\ \xi(z,0) = z \end{cases}$$

однолистна в единичном круге $|z|<1$ как функция от z и существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} e^t\xi(z,t) = f(z)$, причем $f(z)$ однолистна в $|z|<1$.

Глава 3. В третьей главе работы рассматривается интегрирование уравнения Левнера с частными случаями управляющей функции. В первую очередь, находится решение уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi\frac{\mu(\tau)+\xi}{\mu(\tau)-\xi}, \quad 0 \le \tau < +\infty \tag{3}$$

с начальным условием $\xi(z,0)=z$, где управляющая функция $\mu(\tau)=e^{i\alpha}$ – это постоянная функция.

Функция

$$\frac{e^{\tau}\xi(z,\tau)}{(e^{i\alpha}+\xi(z,\tau))^2} = \frac{z}{(e^{i\alpha}+z)^2}, \tag{4}$$

заданная в неявном виде, является решением уравнения (3).

Функция Кебе

$$f(z,\alpha) = \frac{z}{(1+ze^{-i\alpha})^2},$$

полученная при предельном переходе в (4) при $\tau \to \infty$, отображает единичный круг на плоскость с разрезом по лучу, вершина которого имеет модуль, равный $\frac{1}{4}$ и который образует угол α с положительной частью вещественной оси.

Была приведена иллюстрация отображения единичного круга функцией Кебе в пакете *Mathematica*.

В качестве второго примера интегрирования уравнения Левнера с частными случаями управляющей функции рассматривается уравнение

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi\frac{\mu(\tau)+\xi}{\mu(\tau)-\xi}, \quad 0 \le \tau < +\infty \tag{5}$$

с начальным условием $\xi(z,0)=z$, где управляющей функцией $\mu(\tau)$ является линейная функция $\mu(\tau)=e^{i(\alpha+\beta\tau)}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Функция $\xi(z,\tau)$, являющаяся решением уравнения (5), записывается в неявном виде следующим образом:

$$\frac{e^{\tau}\xi}{(1+\delta\bar{\mu}\xi)^{\frac{2}{1-i\beta}}} = \frac{z}{(1+e^{-i\alpha}\delta z)^{\frac{2}{1-i\beta}}},\ \text{где}\ \delta = \frac{1-i\beta}{1+i\beta}. \tag{6}$$

При стремлении в (6) $\tau \to \infty$ была получена предельная функция

$$f(z) = \frac{z}{(1+e^{-i\alpha}\delta z)^{\frac{2}{1-i\beta}}},\ \text{где}\ \delta = \frac{1-i\beta}{1+i\beta}.$$

Следующий результат заключен в рассмотрении дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi\frac{\mu(\tau)+\xi}{\mu(\tau)-\xi} \tag{7}$$

с кусочно-заданной управляющей функцией

$$\mu(\tau) = \begin{cases} e^{i\alpha_1\tau}, & 0 \le \tau \le \tau_1 \\ e^{i(\alpha_2\tau+\beta)}, & \tau_1 \le \tau, \end{cases}$$

где параметры $\tau_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ подобраны специальным образом.

Произведя интегрирование уравнения (7) на промежутках $\tau \in [0, \tau_1]$ и $[\tau_1, \infty)$, было найдено его решение, заданное в неявном виде:

$$\frac{e^{\tau}\xi_1(z,\tau)}{(1+\delta_1 e^{-i(\alpha_2\tau+\beta)}\xi_1(z,\tau))^{\frac{2}{1-i\alpha_2}}} = \frac{e^{\tau_1}\xi^*(z)}{(1+\delta_1 e^{-i(\alpha_2\tau_1+\beta)}\xi^*(z))^{\frac{2}{1-i\alpha_2}}}, \tag{8}$$

где $\delta_1 = \dfrac{1-i\alpha_2}{1+i\alpha_2}$.

Предельная функция, полученная при переходе к пределу в последнем уравнении при $\tau \to \infty$, имеет вид

$$f(z) = \frac{e^{\tau_1}\xi^*(z)}{(1+\delta_1 e^{-i(\alpha_2\tau_1+\beta)}\xi^*(z))^{\frac{2}{1-i\alpha_2}}}.$$

Заключение. Целью работы являлось рассмотрение уравнения Левнера и построение интегралов этого уравнения с частными случаями управляющей функции. В работе рассмотрены случаи постоянного управления, линейного управления, а также кусочно-заданной управляющей функции. Для каждого случая получены однолистные функции класса S.

Список используемых источников

1 *Гутлянский, В.Я., Рязанов, В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений / В.Я. Гутлянский, В.И. Рязанов. К.: Наукова думка, 2011. 426 с.

2 *Loewner, K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises / K. Loewner. // Mathematische Annalen, 1923. С. 103–121.

3 *Юферова, Г. А.* Применение левнеровских семейств отображений в задачах комплексного анализа: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01: защищена 22.06.09 / Галина Александровна Юферова; науч. рук. И. А. Александров; Томский гос. ун-т. Томск, 2009. 83 с.

4 *Александров, А. И.* Вариационная формула Голузина для Левнеровких отображений круга / А.И. Александров, И.А. Александров // Вестник Томского государственного университета. 2008. Т. 1 (2). С. 5 – 10.

5 *Шабат, Б. В.* Введение в комлпесный анализ / Б. В. Шабат. М.: Наука, 1969. 576 с.