Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
наименование кафедры

Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТРЕСКОЙ РАБОТЫ

Студента (ки) 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета

Живовой Юлии Геннадьевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н ______________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:
профессор, д.ф.-м.н ______________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

Введение

В магистерской работе изучаются смешанные задачи для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями на основе резольвентного подхода в методе Фурье. Данный подход был предложен впервые Хромовым А. П..

Хромовым А. П. был получен новый способ использования приема А. Н. Крылова усиления скорости сходимости рядов Фурье. Используется подход, основанный на методе Коши-Пуанкаре контурного интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей по методу Фурье. Находятся условия, дающие решение смешанной задачи, когда волновое уравнение удовлетворяется лишь почти всюду. В случае, когда $\varphi(x)$ есть произвольная функция из $L_2[0,1]$, формальное решение сходится почти всюду и является обобщенным решением смешанной задачи.

Теперь не требуется никакой информации о собственных и присоединенных функциях, необходимо лишь знание главных частей асимптотик собственных значений. В итоге в разделе 2 находится классическое решение смешанной задачи с условием закрепления при минимальных требованиях на начальные данные при комплекснозначной $q(x)$. Этот метод далее с успехом применен в случае всех двухточечных краевых условий. Так, в разделе 3 исследован случай, когда граничные условия содержат первые производные решений. В разделе 3 исследован случай граничных условий, когда одно из них содержит первые производные решений, а второе – нет. Раздел 4 содержит случаи периодических, антипериодических краевых условий, а также содержит и случаи, когда спектральная задача может давать и присоединенные функции в любом количестве.

1 Постановка задачи

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничных условиях следующих трех видов:

$$\begin{gathered} \text{а)} u(0,t) = u(l,t) = 0; \\ \text{б)} u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(l,t) = 0, \\ u'_x(l,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(l,t) = 0; \\ \text{в)} u'_x(0,t) + \beta u'_x(l,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(l,t) = 0, \\ \alpha u(0,t) + u(l,t) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i, i = 1,2,$ - комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты. Граничные условия а) - в) охватывают все линейные двухточечные граничные условия (условие в)), в которых β стоит перед $u'_x(0,t)$, $\quad \alpha$ - перед $u(l,t)$, сводятся к в) заменой $x = 1 - \xi$ и поэтому не идет в счет.

Метод Фурье дает классическое решение (т.е. дважды непрерывно дифференцируемое) задачи (1), (2) при условии а) для $q(x) \in C[0,1]$ и вещественной при следующих минимальных условиях на $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0.$$

2 Резольвентный подход в методе методе Фурье

В этом разделе рассмотрим задачу (1)-(3). Предполагаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, а $\varphi(x) \in W_2^2[0,1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ($W_2^2[0,1] = \{f(x) \in C^1[0,1] | f'(x)$абсолютно непрерывна и $f''(x) \in L_2[0,1]\}$). Будем пользоваться некоторыми результатами из [2], приводя их часто с доказательствами для облегчения чтения.

2.1 Преобразование формального решения

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Представим формальное решение по методу Фурье в виде (см. [27],[28]):

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \tag{4}$$

Теорема 1 *Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{5}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] cos\rho t d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ - *резольвента оператора* L_0, *который есть оператор* L *при* $q(x) \equiv 0$ *(считаем, что вышеприведенные требования на* μ_0 *выполняются и для оператора* L_0*).*

2.2 Исследование $u_0(x,t)$

Лемма 1 *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma n}\right)(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t d\lambda. \tag{6}$$

Обозначим через $z_1(x,p)$ *и* $z_2(x,p)$ *решения уравнения*

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1,\ \ z_1'(0,\rho) = 0,\ \ z_2(0,\rho) = 0,\ \ z_2'(0,\rho) = 1.$$

Тогда $z_j(x,\rho)$ *целые по* ρ *и даже по* λ, *где* $\lambda = \rho^2$.

Теорема 2 *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,p)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \tag{7}$$

где

$$v(x,\rho) = \frac{z_2(x_1\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)},\ \ (f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\ dx, (M_\rho f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)\ dt\ dx,$$

$$M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \end{vmatrix}$$

Замечание. Для R_λ^0 имеет место формула

$$R_\lambda^0 f = -z_2^0(x,\rho)(f,z_1^0) + v^0(x,\rho)(f,z_2^0) + (M_\rho^0 f)(x), \tag{8}$$

где $z_j^0(x,\rho)$, $j=1,2$, $v^0(x,\rho), M_\rho^0$ те же, соответственно, что $z_j(x,\rho)$, $j=1,2$, $v(x,\rho), M_\rho$, но выписанные теперь для оператора L_0.

Таким образом,

$$z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x,\ \ z_2^0(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho},\ \ v^0(x,\rho) = \frac{\sin\rho x\cos\rho}{\sin\rho},$$

Теорема 3 *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)], \tag{9}$$

где $\Phi(x) \in W_2^2[-A, A]$ *при любом* $A > 0, \Phi(x) = -\Phi(-x), \Phi(2+x) = \Phi(x), \Phi(x) = \varphi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

2.3 Исследование $u_2(x,t)$

По теореме 2, учитывая что первое и третье слагаемые в (8) есть целые по λ, получим представление для $u_2(x,t)$:

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0}^{\infty} \int\limits_{\tilde{\gamma_n}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v(x,\rho)(g, z_2) - v^0(x,\rho)(g, z_2^0)] \cos \rho t d\lambda.$$

Лемма 2 *Ряды* $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$, $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)$ $\quad (j = 0,\ 1,\ 2)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [-T, T]$, *где* $T > 0$ *- любое фиксированное число.*

2.4 Классическое решение задачи (1)-(3)

Теорема 4 *Формальное решение (4) есть классическое решение задачи (1) - (3) при минимальных условиях*

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$$

на $\varphi(x)$.

3 Случай граничных условий, содержащих производные решения

В этом разделе методом раздела 2 исследуется смешанная задача для волнового уравнения с комплекснозначным потенциалом и краевыми условиями б), обобщающими случаи свободного закрепления обоих концов, т.е. будем изучать следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{10}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 + u(1,t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{13}$$

где $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначные, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

3.1 Преобразование формального решения

Теорема 5 *Формальное решение $u(x,t)$ можно представить в виде*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{14}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma_n}}\right) \frac{1}{\lambda - \mu_0}(R^0_\lambda g)\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n \geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma_n}} \frac{1}{\lambda - \mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t d\lambda,$$

$$R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}.$$

Теорема 6 *Для $R_\lambda f$ имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f,z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) + M_\rho f, \tag{15}$$

где

$$M_\rho f = \int_0^x M(x,\xi,\rho) f(\xi) d\xi, \quad M(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho) \end{vmatrix},$$

$$v_j(x,\rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \{[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_2) + (z'_{3-j}(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_2)]z_1(x,\rho) +$$

$$+[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_1) - (z'_{3-j}(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_1)]z_2(x,\rho)\}, \quad j = 1,2,$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1), \quad (f,z) = \int_0^x f(\xi) z(\xi) d\xi.$$

Теорема 7 *Для* R_λ^0 *имеет место формула*

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)(f,z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(f,z_2^0) + M_\rho^0 f,$$

где

$$v_1^0(x,\rho) = -\frac{z_2'^0(1,\rho) z_1^0(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)} = -\frac{\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho},$$

$$v_2^0(x,\rho) = \frac{z_1'^0(1,\rho) z_1^0(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)} = -\cos\rho x,$$

$$M_\rho^0 f = \int_0^x \begin{vmatrix} z_1^0(x,\rho) & z_2^0(x,\rho) \\ z_1^0(\xi,\rho) & z_2^0(\xi,\rho) \end{vmatrix} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin\rho(x-\xi) f(\xi) d\xi,$$

$$\Delta_0(\rho) = \rho\sin\rho.$$

3.2 Исследование $u_0(x,t)$

Лемма 3 *Для $u_0(x,t)$ имеет место формула*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t d\lambda, \tag{16}$$

где $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$.

Теорема 8 *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0(x,t), \tag{17}$$

где $u_0^0(x,t) = (\varphi_1, 1)$, $\quad u_n^0(x,t) = a_n\cos\rho_n^0 x\cos\rho_n^0 t$, $\quad n = 1,2,...,a_n =$ $2(\varphi_1(\xi),\cos\rho_n^0\xi)$, $\quad \rho_n^0 = n\pi$.

Лемма 4 *Для функций $u_n^0(x,t)$ справедливы формулы:*

$$u_n^0(x,t) = \frac{1}{2}(v_n(x+t) + v_n(x-t)), \quad n = 0,1,2,...,$$

где $v_0(x) = u_0^0, v_n(x) = a_n\cos\rho_n^0 x$.

3.3 Исследование $u_2(x,t)$

По теоремам 6 и 7, с учетом того, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ есть целые функции по λ, для $u_2(x,t)$ получаем следующее представление:

$$u_2(x,t) = \sum_{n\geq n_0} a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{2\rho\cos\rho t}{\rho^2-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2) -$$

Лемма 5 *Ряды $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$ и $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$ при любом фиксированном $T>0$, $j=0,1,2$.*

3.4 Классическое решение задачи (10) - (13)

Теорема 9 *Формальное решение $u(x,t)$ задачи (10) - (13) есть классическое решение при $\varphi(x) \in C^2[0,\pi]$ и выполнении условий*

$$\varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0.$$

4 Случай граничных условий разных порядков

Изучим случай граничных условий в). Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{18}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1(1,t) = 0, \tag{19}$$

$$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{20}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{21}$$

где $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначные, $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ - комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

4.1 Преобразование формального решения

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right) \frac{1}{\lambda - \mu_0}(R^0_\lambda g)\cos\rho t d\lambda, \tag{22}$$

где $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$.

Имеет место формула

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R^0_\lambda \varphi_1)\cos\rho t d\lambda,$$

т.е. $u_0(x,t)$ есть формальное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \;\; u(x,0) = \varphi_1(x), \;\; u'_t(x,0) = 0, \tag{23}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{24}$$

Теорема 10 *Формальное решение $u(x,t)$ задачи (18)-(21) представимо в виде*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right) \frac{1}{\lambda - \mu_0}(R^0_\lambda g)\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g - R^0_\lambda g)\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma_n}}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g - R^0_\lambda g)\cos\rho t d\lambda.$$

Теорема 11 *Для $R_\lambda f$ имеет место формула*

$$R_\lambda f = \upsilon_1(x,\rho)(f,z_1) + \upsilon_2(x,\rho)(f,z_2) + M_\rho f, \tag{25}$$

где

$$M_\rho f = \int\limits_0^x M(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi,\ \ M(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho)\end{vmatrix},$$

$$\upsilon_1(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}\{[U_2(z_2)(\beta z_2'(1,\rho)+\beta_1 z_2(1,\rho)) - U_1(z_2)z_2(1,\rho)]z_1(x,\rho)+$$

$$+[U_1(z_1)(\beta z_2(1,\rho) - U_2(z_1)(\beta z_2'(1,\rho)+\beta_1 z_2(1,\rho))]z_2(x,\rho)\},$$

$$\upsilon_2(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}\{[-U_2(z_2)(\beta z_1'(1,\rho)+\beta_1 z_1(1,\rho)) + U_1(z_2)z_1(1,\rho)]z_1(x,\rho)+$$

$$+[-U_1(z_1)(\beta z_1(1,\rho) + U_2(z_2)(\beta z_1'(1,\rho)+\beta_1 z_1(1,\rho))]z_2(x,\rho)\},$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(x_2) - U_1(z_2)U_2(z_1),\ \ \Delta(\rho)\neq 0,\ \ (f,z) = \int\limits_0^1 f(\xi)z(\xi)d\xi.$$

Теорема 12 *Для R^0_λ имеет место формула*

$$R^0_\lambda f = \upsilon^0_1(x,\rho)(f,z^0_1) + \upsilon^0_2(x,\rho)(f,z^0_2) + M^0_\rho f,$$

где

$$\upsilon^0_1(x,\rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\{[U^0_2(z^0_2)\beta {z'}^0_2(1,\rho) - U^0_1(z^0_2)z^0_2(1,\rho)]z^0_1(x,\rho)+$$

$$+[U^0_1(z^0_1)z^0_2(1,\rho) - U^0_2(z^0_1)\beta {z'}^0_2(1,\rho)]z^0_2(x,\rho)\},$$

$$v_1^0(x,\rho)=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}\{[-U_2^0(z_2^0)\beta {z'}_1^0(1,\rho)+U_1^0(z_1^0)z_1^0(1,\rho)]z_1^0(x,\rho)+$$

$$+[-U_1^0(z_1^0)z_1^0(1,\rho)+U_2^0(z_2^0)\beta {z'}_1^0(1,\rho)]z_2^0(x,\rho)\},$$

$$M_\rho^0 f=\int\limits_0^x M_0(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi,\ \ M_0(x,\xi,\rho)=\begin{vmatrix} z_1^0(x,\rho) & z_2^0(x,\rho)\\ z_1^0(\xi,\rho) & z_2^0(\xi,\rho)\end{vmatrix},$$

$$\Delta_0(\rho)=U_1^0(z_1^0)U_2^0(z_2^0)-U_1^0(z_2^0)U_2^0(z_1^0)=-[\alpha+\beta+(1+\alpha\beta)\cos\rho],$$

$$U_1^0(z)=z'(0)+\beta z'(1),\ \ U_2^0(z)=U_2(z),\ \ \Delta_0(\rho)\neq 0.$$

4.2 Исследование $u_0(x,t)$

Теорема 13 *Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение эталонной задачи (23), (24).*

4.3 Исследование $u_2(x,t)$

По теоремам 11 и 12, учитывая, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ являются целыми функциями по λ, для $u_2(x,t)$, получаем следующее представление:

$$u_2(x,t)=\sum_{n\geq n_0} a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{2\rho\cos\rho t}{\rho^2-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)-$$

$$v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0)(g,z_1^0)-u_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)]d\rho. \tag{26}$$

Лемма 6 *Ряды $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$ и $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$ при любом фиксированном $T>0$.*

4.4 Классическое решение задачи (18)-(21)

Теорема 14 *Формальное решение $u(x,t)$ задачи (18)-(21) является классическим решением при $\varphi(x) \in C^2[0,\pi]$ и выполнении условий*

$$\varphi'(0) + \beta\varphi'(1) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1(1) = 0, \quad \alpha\varphi(0) + \varphi(1) = 0,$$

$$\alpha\varphi''(0) + \varphi''(1) - \alpha q(0)\varphi(0) - q(1)\varphi(0) - q(1)\varphi(1) = 0.$$