Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Триангуляция и метод конечных элементов

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 219 группы
направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Ромзаевой Анастасии Сергеевны

Научный руководитель
кандидат.ф.- м. наук, доцент ______________________ Ю.В.Матвеева

Зав. кафедрой
доктор.ф.-м.наук, профессор ______________________ Д.В. Прохоров

САРАТОВ 2017

Введение

Из российских работ, посвященных приближению функции многочленами на треугольной сетке, отметим и рассмотрим работы Субботина Ю. Н. и Байдаковой Н. В..

В работе ставятся следующие задачи:

1. Ознакомиться с определением триангуляции и триангуляции Делоне, рассмотреть проверку условия Делоне при построении для заданных пар треугольников, способы построения триангуляции.

2. Построить кубический интерполяционный многочлен 2-х переменных на треугольной сетке, оценить точность его построения.

3. Построить кубический интерполяционный многочлен в 3-х мерном пространстве, оценить точность его построения.

Основное содержание работы

Введём определения и леммы для изучения задачи триангуляции, представленные А.В.Скворцовым:

Определение 1. *Триануляцией* называют планарное разбиение плоскости на N фигур, из которых одна является внешней неограниченной, а остальные – треугольниками.

Определение 3. *Задачей построения триангуляции по заданному набору двумерных точек* называется задача соединения заданных точек непересекающимися отрезками так, чтобы образовалась триангуляция.

Определение 6. Говорят, что триангуляция удовлетворяет *условию Делоне*, если внутрь окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции.

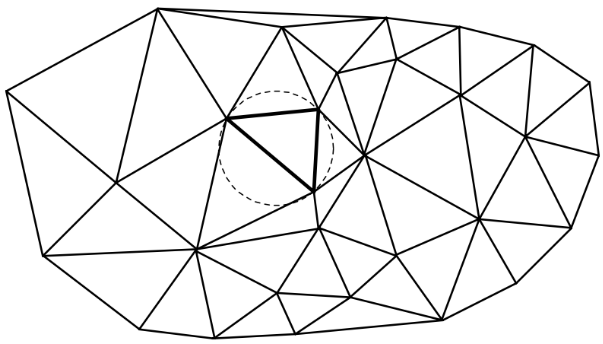

Рис. 1. Триангуляция Делоне

Лемма (Скворцов). Любая триангуляция множества из N точек имеет одинаковое число треугольников $T = 2 \cdot (N-1) - N_c$ (но не более $2 \cdot N - 4$) и одинаковое число ребер $R = 3 \cdot (N-1) - N_c$ (не больше или равно $3 \cdot N - 6$).

Число различных триангуляций конечного множества точек конечно. Вводя критерии сравнения триангуляций множества $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}, N > 3$, можно разработать различные алгоритмы построения триангуляций.

Метод конечных элементов — это численная процедура решения задач, сформулированных в виде дифференциального уравнения или вариационного принципа. Метод конечных элементов заключается в том, что аппроксимирующая функция (близкая к исходной) является линейной комбинацией непрерывных кусочно-гладких финитных функций. Финитные функции отличны от нуля только в заданном интервале. В МКЭ под такими интервалами подразумеваются конечные элементы, на которые разбивается область.

Термин метод конечных элементов, определяет широкий спектр вычислительных технологий в соответствии с некоторыми общими свойствами. Процесс конечно-элементного анализа включает определенную последовательность шагов. Перечислим эти шаги:

1. Дискретизация области: построение сетки, задание свойств элементов.

2. Выбор аппроксимирующих (базисных) функций, которые выбираются в виде полиномов.

3. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений.

4. Решение системы уравнений.

5. Определение расчетных величин в элементах. Этими величинами обычно являются производные от неизвестной функции.

Будем рассматривать деление области на треугольники, где на каждом треугольнике задаётся полином третьей степени. На каждом треугольнике кубический полином интерполяционными условиями будет определяться однозначно, и в дальнейшем будем рассматривать лишь один треугольник.

Введем следующие обозначения для полинома третьей степени (кубического) по совокупности переменных:

$$P_3(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3. \tag{2.1}$$

Пусть Δ — невырожденный треугольник и функция $f(x,y)$ непрерывна на нем вместе с частными производными до четвертого порядка включительно. Будем предполагать, что равномерные нормы на треугольнике Δ любых четвертых производных функции $f(x,y)$ не превосходят M, где M — некоторое заданное число. При оценках погрешности аппроксимации константы, не зависящие от $f(x,y)$ и от триангуляции, не выписываются в явном виде и иногда обозначаются одной и той же буквой K. Без ограничения общности мы можем считать, что треугольник Δ расположен так, как показано на рисунке 2.

В статье - Новый кубический элемент в МКЭ, написанной Ю.Н.Субботиным, на интерполяционный полином $P_3(x,y) = P_3(f;x,y)$ налагаются следующие условия:

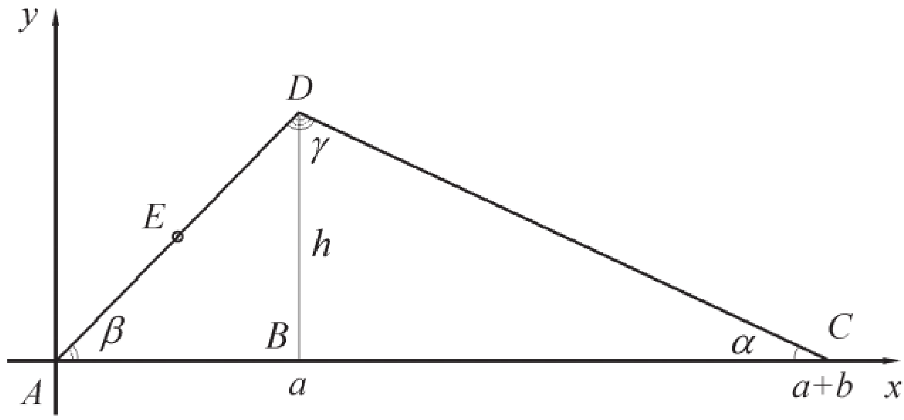

Рис. 2.

1. Значения этого полинома в точках A, C, D совпадают со значениями функции $f(x, y)$ в этих точках.

2. Значения первых производных полинома по x и y в точках A, C, D совпадают со значениями соответствующих производных функции в тех же точках.

3. Значения производных по x полинома и функции в точке E совпадают.

То есть, интерполяционные условия имеют следующий вид:

1.
$$f(A) = P_3(A), \qquad f(C) = P_3(C), \qquad f(D) = P_3(D).$$

2.
$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(A)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(C)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(C)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(D)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(D)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(A)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f(C)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(C)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f(D)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(D)}{\partial y}.$$

3.
$$\frac{\partial f(E)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(E)}{\partial x}.$$

Пусть M - некоторое заданной число, и любые четвертые производные функции $f(x, y)$ не превосходят число M. Под W^4M будем понимать класс функций, непрерывных на Δ, у которых на Δ существуют непрерывные производные четвертого порядка по всем направлениям $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, и для любых $x, y \in \Delta$ и любых $\xi^s (s = 1, 2, 3, 4)$ выполняется неравенство

$$|D_{\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4} f(x, y)| \leqslant M.$$

Оценим точность построенного интерполяционного многочлена $P_3(x, y)$, удовлетворяющего условиям 1)-3).

Теорема 1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\left\| \frac{\partial^k e(x,y)}{\partial x^k} \right\|_{C(\Delta)} \leqslant KMH^{4-k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 3), \tag{2.3}$$

$$\left\| \frac{\partial^k e(x,y)}{\partial y \partial x^{k-1}} \right\|_{C(\Delta)} \leqslant \frac{KMH^{4-k}}{\sin\gamma} \qquad (1 \leqslant k \leqslant 3), \tag{2.4}$$

$$\left\| \frac{\partial^k e(x,y)}{\partial y^2 \partial x^{k-2}} \right\|_{C(\Delta)} \leqslant \frac{KMH^{4-k}}{\sin^2\gamma} \qquad (2 \leqslant k \leqslant 3), \tag{2.5}$$

$$\left\| \frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3} \right\|_{C(\Delta)} \leqslant \frac{KMH}{\sin^3\gamma}, \tag{2.6}$$

где K — константы, не зависящие от f и Δ.

Для доказательства теоремы был рассмотрен ряд вспомогательных результатов.

Положим $e_{i,j}(x,y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}[f(x,y) - P_3(x,y)]$. Тогда в силу условий в точке A имеем

$$e_{0,0} = e_{1,0}(0,0) = e_{0,1}(0,0) = 0. \tag{2.7}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$e_{2,0}(0,0) = \int\limits_0^H (H-t)^2 \frac{t}{H^2} \cdot \frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\, dt, \tag{2.9}$$

$$e_{3,0}(0,0) = -\int\limits_0^H \frac{(H-t)^2(H+2t)}{H^3} \cdot \frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\, dt. \tag{2.10}$$

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$|e_{1,1}(0,0)| \leqslant KMH^2 \max\left(\frac{a}{h}, 1\right), \tag{2.13}$$

$$|e_{2,1}(0,0)| \leqslant KMH \max\left(\frac{a}{h}, 1\right), \tag{2.14}$$

$$|e_{1,2}(0,0)| \leqslant KMH \max\left(\frac{a^2}{h^2}, 1\right). \tag{2.15}$$

Лемма 3. *Справедливы следующие равенства:*

$$|e_{0,1}(0,0)| \leqslant KMH^2 \max\left(\frac{a^2}{h^2}, 1\right), \tag{2.22}$$

$$|e_{0,3}(0,0)| \leqslant KMH \max\left(\frac{a^3}{h^3}, 1\right). \tag{2.23}$$

Доказательство. Теорема 1. Используя формулу Тейлора в окрестности точки $(0,0)$ с остаточным членом в форме Лагранжа, учитывая леммы 1-3 и неравенство $\frac{a}{h} = \operatorname{ctg}\beta \leqslant \frac{1}{\sin\beta} \leqslant \frac{2}{\sin\gamma}$, получаем оценки (2.3) – (2.6). Обобщением формул теоремы 1 является

$$\left\|\frac{\partial^k e(x,y)}{\partial y^j \partial x^{k-j}}\right\|_{C(\Delta)} \leqslant KMH^{4-k}\frac{1}{\sin^j\gamma}. \tag{1}$$

■

В статье Байдаковой, вычислялась погрешность приближения для полинома третьей степени по совокупности переменных

$$P_3(x,y,z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 +$$
$$+ a_9y^3 + a_{10}z + a_{11}z^2 + a_{12}z^3 + a_{13}xz^2 + a_{14}yz^2 + a_{15}x^2z +$$
$$+ a_{16}y^2z + a_{17}xyz + a_{18}xz + a_{19}yz,$$

который задаётся с помощью 20 условий, из которых 16 имеют вид:

$$P_3(a_i) = f(a_i) \quad (i = 1,2,3,4), \tag{2}$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial \tau_{ij}} \quad (i = 1,2,3,4; j \in \{1,2,3,4\}\backslash\{i\}). \tag{3}$$

Оставшиеся условия выбирали так, чтобы можно было обеспечить непрерывность кусочно полиномиальной функции на исходной триангулированной области: зададим по одной смешанной производной на каждой из граней T_i в вершине при среднем или наибольшем угле. При выборе такого условия, многочлен P_3 на каждой из граней становится многочленом двух переменных.

Для условия смешанных производных, будем различать симплексы двух типов К1 и К2. К типу К1 отнесем симплексы, у которых два наименьших ребра не имеют общих точек, к типу К2 - симплексы, у которых такие ребра имеют общую вершину.

Для симплекса типа К1 с наименьшими ребрами a_1a_4 и a_2a_3 (рисунок 3), две смешанные производные зададим в a_1 и две - в a_2:

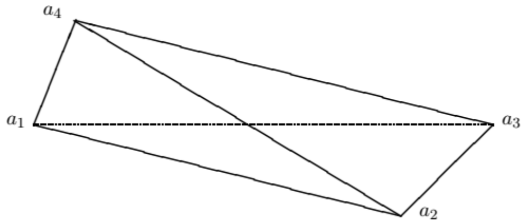

Рис. 3. Симплекс типа К1

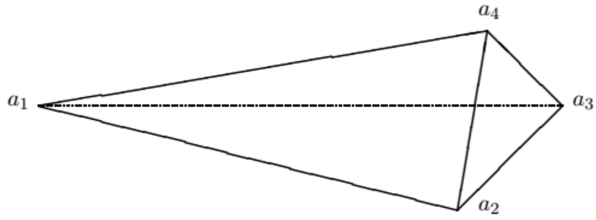

Рис. 4. Симплекс типа К2

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} \quad ((i,j,k) \in \{(1,2,4),(1,3,4),(2,1,3),(2,4,3)\}). \qquad (4)$$

Для симплекса типа К2 берём наименьшее и следующее по величинам ребра принадлежащие грани T_1 (рисунок 4). Задаются по две производных в любых двух вершинах, принадлежащих T_1. Пусть это будут точки a_2 и a_3:

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} \quad ((i,j,k) \in \{(2,1,3),(2,1,4),(3,1,4),(3,4,2)\}). \qquad (3.5)$$

Рассматривая на каждом из указанных симплексов отдельно данные наборы интерполяционных условий, будем получать СЛАУ, которая имеет единственное решение.

Через $\sin\gamma$ обозначили наименьший из всех максимальных углов в треугольнике.

Функция $f(x,y,z)$ непрерывна на T вместе со всеми частными производными до 4 порядка включительно, и для любых задающих направления единичных векторов $\xi_1,\ldots,\xi_4$ абсолютные значения производных $D^4_{\xi_1,\ldots,\xi_4}$ ограничены на T числом M. Обозначим $e(u) = f(u) - P_3(u)$, где $u \in T$. Для каждого типа симплекса и соответствующей им системы интерполяционных условий (3.2)-(3.4); (3.2), (3.3) и (3.5) будет выбираться собственная система координат xyz и доказана теорема об оценках сверху.

I. Симплекс типа К1 и условия (3.2)-(3.4). Выберем систему координат xyz так, чтобы ось x была параллельна ребру a_1a_2, в вершинах которого задаются смешанные производные (3.4). Данное ребро принадлежит граням T_4 и T_3. Пусть для определенности синус угла грани T_4 больше синуса угла принадлежащего грани T_3 ($\sin\beta_4 \geq \sin\beta_3$). В этом случае плоскость xy совместится с плоскостью треугольника T_4. Ось z перпендикулярна плоскости xy (рисунок 5). Пусть $\varphi_x^{ij}, \varphi_y^{ij}, \varphi_z^{ij}$ углы между τ_{ij} и соответствующими координатными осями. Тогда

$$|\cos\varphi_z^{14}| = \sin\gamma_{14}^4 = \sin\gamma_4, \quad |\cos\varphi_y^{14}| \leqslant R\sin\beta_3 \leqslant R\sin\beta_4, \qquad (3.6)$$

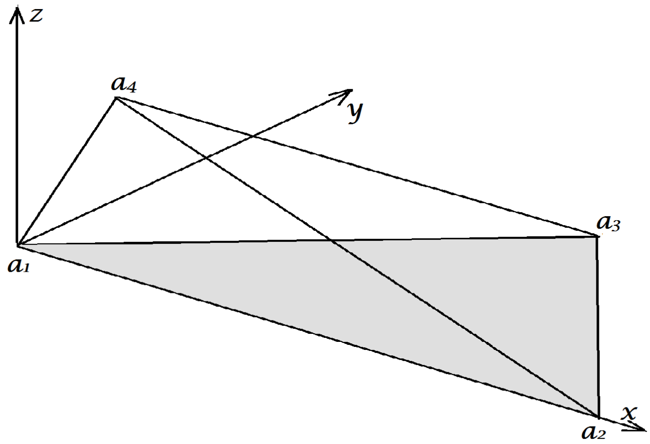

Рис. 5. Расположение симплекса К1

где R - некоторая константа не зависящая от T.

Теорема 2. *Для введенной системы координат, симплекса типа К1 и условий интерполяции (3.2)-(3.4) справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q}e(u)}{\partial x^s\partial y^p\partial z^q}\right| \leqslant \frac{CMH^{4-s-p-q}}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4} \tag{3.7}$$

где $u\in T$; $0\leqslant s+p+q\leqslant 3$; C - константа, не зависящая от T и функции f.

Доказательство. Получим оценки производных функции $e(u)$ в вершине a_2. Значения функции $e(u)$ и её первых производных в точке a_2 равны нулю в силу условий (3.2), (3.3). Выполним оценку производных второго и третьего порядков.

Лемма 4. *Пусть $s+p+q=2$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^{2}e(a_2)}{\partial x^s\partial y^p\partial z^q}\right| \leqslant \frac{CMH^{2}}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}. \tag{3.8}$$

Лемма 5. *Пусть $s+p+q=3$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^{3}e(a_2)}{\partial x^s\partial y^p\partial z^q}\right| \leqslant \frac{CMH}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}. \tag{3.12}$$

Продолжим доказательство теоремы 2.

Пусть $s,p,q,t,r,m\geqslant 0$ и $0\leqslant s+p+q+t+r+m\leqslant 3$. Тогда, представляя производные по направлению через производные по x,y,z и выполняя оценки по леммам 4, 5 и соотношениям (3.6), будем иметь

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q+t+r+m}e(a_2)}{\partial x^s\partial y^p\partial z^q\partial\tau_{21}^t\partial\tau_{23}^r\partial\tau_{14}^m}\right| \leqslant \frac{CMH^{4-(s+p+q+t+r+m)}}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}.$$

А именно получили обобщенный вид теоремы 2. ■

II. Симплекс типа K2 и условия (3.2), (3.3), (3.5). Выберем систему координат xyz так, чтобы ось x была параллельна ребру a_2a_3, в вершинах которого задаются смешанные производные (3.5). Данное ребро принадлежит граням T_1 и T_4. Пусть для определенности $\sin\beta_4 \geqslant \sin\beta_1$. В этом случае плоскость xy совместим с плоскостью треугольника T_4. Ось z перпендикулярна xy.

Пусть, $\varphi_x^{ij}, \varphi_y^{ij}, \varphi_z^{ij}$ - углы между τ_{ij} и соответствующими координатными осями. Отметим, что условия (3.5) задаются в средних или наибольших углах граней T_i, ребра a_2a_4 и a_1a_4 при выбранном способе интерполяции не могут быть наименьшими в T_1 и T_2 соответственно. Тогда

$$|a_3 - a_4| \leqslant 2\max\{|a_2 - a_4|, |a_1 - a_4|\}$$

. Таким образом, верны соотношения

$$|\cos\varphi_z^{34}| \leqslant 2\max\sin\gamma_{24}^4, \sin\gamma_{14}^4 \leqslant R_1\sin\gamma_4, \quad |\cos\varphi_y^{34}| \leqslant R_2\sin\beta_1 \leqslant R_2\sin\beta_4 \tag{3.15}$$

(первое неравенство следует из соотношений между ребрами $a_ia_4, i = 1, 2, 3$; второе получается аналогично неравенству (3.6)).

Теорема 3. *Для введенной системы координат, симплекса типа K2 и условий интерполяции (3.2), (3.3), (3.5) справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q}e(u)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q}\right| \leqslant \frac{CMH^{4-s-p-q}}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}, \tag{3.16}$$

где $u \in T$*;* $0 \leqslant s+p+q \leqslant 3$*;* C *- константа, не зависящая от* T *и функции* f*.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам нужны оценки производных для $e(u)$ в точке a_3. Значения функции $e(u)$ и её первых производных в a_3 равны нулю в силу условий (3.2), (3.3). Остаётся оценить производные второго и третьего порядка.

Лемма 6. *Пусть* $s+p+q = 2$*. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q}\right| \leqslant \frac{CMH^2}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}. \tag{3.17}$$

Лемма 7. *Пусть* $s+p+q = 3$*. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q}\right| \leqslant \frac{CMH}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}. \tag{3.18}$$

Продолжим доказательство теоремы 3.

Пусть $s, p, q, t, r, m \geqslant 0$ и $0 \leqslant s + p + q + t + r + m \leqslant 3$. Тогда, представляя производные по направлению через производные по x, y, z и выполняя оценки по леммам 6, 7 и соотношениям (3.15), будем иметь

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q+t+r+m} e(a_3)}{\partial x^s \partial y^p \partial z^q \partial \tau_{31}^t \partial \tau_{32}^r \partial \tau_{34}^m} \right| \leqslant \frac{CMH^{4-(s+p+q+t+r+m)}}{\sin^p \beta_4 \sin^q \gamma_4}.$$

А именно получили обобщенный вид теоремы 3. ■

С помощью теорем 2 и 3, мы доказали оценки точности интерполяционных многочленов, которые построены на симплексах К1 и К2.

Заключение

В работе поставленные задачи были достигнуты: рассмотрены основные определения триангуляции, изучена триангуляция Делоне для плоскости - условие Делоне и его проверка, изучены различные алгоритмы построения триангуляции Делоне. Также построены кубический интерполяционный многочлен 2-х переменных на треугольной сетке и кубический интерполяционный многочлен в 3-х мерном пространстве, произведена оценка точности их построения.