Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

СИСТЕМА ФАБЕРА-ШАУДЕРА НА ПЛОСКОСТИ В АФФИННЫХ КООРДИНАТАХ

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 219 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Амера Джасима Мохаммеда

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

профессор,д.ф.-м.н.		С.Ф.Лукомский
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:

профессор, д.ф.-м.н.		Д.В.Прохоров
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

Введение

Данная работа посвящена некоторым вопросам приближения непрерывных функций с помощью систем типа Фабера-Шаудера на прямой и на плоскости. в декартовой и аффинной ситемах координат.

Актуальность выбора темы обусловлена большой важностью, которую имеет задача приближения функций многих переменных более простыми функциями. Такая задача возникает в моделировании различных физических процессов.

Классическая система Фабера-Шаудера была определена на отрезке [0,1] Фабером [1] в 1910 году через интегрирование функций Хаара. Шаудер [2] переоткрыл ее в 1927 году и до 70-х годов она называлась системой Шаудера. Работу Фабера вспомнили в 70-х годах и систему стали называть системой Фабера-Шаудера. Эта система является простейшим базисом пространства C[0,1].

Различные свойства этой системы изучены в работах [3]-[8]. В работе Аубакирова и Бокаева [9] рассмотрена обобщенная система Фабера-Шаудера, построенная по произвольной последовательности (p_n) натуральных чисел. Во всех этих работах система Фабера-Шаудера определялась на отрезке $[0, 1]$.

Работа состоит из четырех частей, приложения и заключения.

В первой части работы дается определение функций Фабера-Шаудера на отрезке, приводятся основные ее свойства, формулы для нахождения коэффициентов системы, а так же оценки приближения непрерывных функций через модуль непрерывности.

Во второй части рассматривается гладкий аналог данных функций, предложенный С.Чумаченко [10]-[13], являющихся сплайном второго порядка.

В третьей части работы вводится бариоцентрическая система координат и изучается Фабера-Шаудера на треугольной сетке, в бариоцентрических координатах введенная В.Абрамовой [14].

В заключительной части рассматривается данная система на треугольной сетке, но уже в афинной системе координат.

В приложении приводится текст программы, написанной на языке Wolfram Mathematica, реализующей приближение непрерывной функции рядом по системе Фабера-Шаудера, а так же результаты численного эксперимента.

Цель дипломной работы - построить аналог функций Фабера-Шаудера на плоскости в аффинной системе координат и исследовать ее свойства.

Задачи:

1)Исследовать свойства классической системы Фабера-Шаудера.

2)Рассмотреть гладкий аналог данной системы, предложенный С.Чумаченко.

3)Исследовать систему Фабера-Шаудера на плоскости в бариоцентрических ко-

ординатах, введенную В.Абрамовой.
4)Построить аналогичную систему в аффинных координатах.
5)Провести численный эксперимент.

Основное содержание работы

1 Система Фабера-Шаудера на отрезке

1.1 Система Фабера-Шаудера на отрезке, основные понятия и графики

Определение 1.1. *Системой Фабера-Шаудера называется система функций*

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad x \in [0,1], \tag{1.2}$$

и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \cdots$, $i = 1, 2, \cdots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_{2^k+i}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}) \\ 1, & x = \frac{2i-1}{2^{k+1}} \\ \text{линейна и непрерывна на} & [\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}] \\ & \text{и на } [\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}] \end{cases}, \tag{1.3}$$

или, в явном виде

$$\varphi_n(x) = \varphi_{2^k+i}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right) \\ \\ x - \frac{i-1}{2^k}, & x \in \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \\ \\ \frac{i}{2^k} - x & x \in \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right] \\ \end{cases},$$

Систему Фабера-Шаудера можно определить также, интегрируя функции Хаара.
Точнее говоря, имеют место равенства

$$\varphi_1(x) = \int\limits_0^x \chi_1(t)dt, \quad \varphi_n(x) = 2\|\chi_n\|_\infty \int\limits_0^x \chi_n(t)dt, \quad n = 2, 3, \cdots \tag{1.4}$$

Нарисуем графики функций $\varphi_2(x)$ и $\varphi_{2^k+i}(x)$

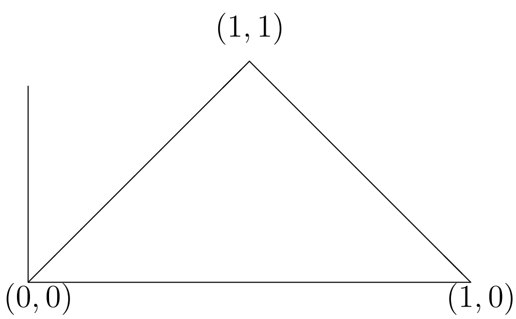

Рисунок 1-График $\varphi_2(x)$.

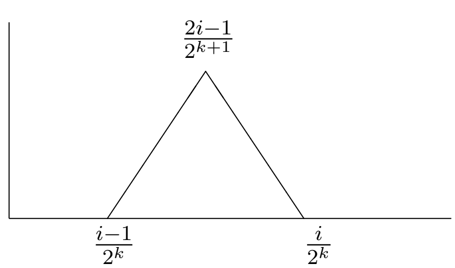

Рисунок 2-График $\varphi_{2^k+i}(x)$.

1.2 Коэффициенты разложения по системе Фабера-Шаудера, частичные суммы, их вычисление и график

Рассмотрим ряд по системе Фабера-Шаудера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i}\varphi_k^{(i)}(x) \tag{1.5}$$

и предположим, что он сходится в каждой точке отрезка $[0,1]$ к конечной функции $f(x)$. Докажем, что тогда коэффициенты $\{A_n\}$ однозначно определяются функцией $f(x)$, а именно, что

$$A_0 = A_0(f) = f(0), \tag{1.6}$$

$$A_1 = A_1(f) = f(1) - f(0), \tag{1.7}$$

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right], \tag{1.8}$$

где $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \cdots$, $i = 1, 2, \cdots, 2^k$.

Используя равенства (1.8)

$$A_0 = A_0\varphi_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(0),$$

$$A_0 + A_1 = A_0\varphi_0(1) + A_1\varphi_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(1),$$

мы находим, что $A_0 = f(0)$, $A_1 = f(1) - f(0)$. Если же $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \cdots$, $i = 1, 2, \cdots, 2^k$, то согласно (1.2)

$$A_n = \sum_{s=2^k+1}^{2^{k+1}} A_s\varphi_s\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = S_{2^{k+1}}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - S_{2^k}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right), \tag{1.9}$$

где $S_N(x)$ – частная сумма ряда (1.5):

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x), \quad N = 0, 1, \cdots . \tag{1.10}$$

Из (1.2) видно, что функции $\varphi_n(x)$ равны нулю в точках $x = l/2^k$, $l = 0, 1, \cdots, 2^k$, если $n > 2^k$. Следовательно, учитывая, что $S_{2^k}(x)$ линейна на каждом отрезке $[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]$, $i = 1, 2, \cdots, 2^k$, из соотношения (1.9) мы находим, что

$$A_n = S_{2^{k+1}}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[S_{2^k}\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + S_{2^k}\left(\frac{i}{2^k}\right)\right] =$$

$$f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right].$$

Из доказанных нами формул (1.8), в частности, вытекает, что при $N = 1, 2, \cdots$ равенство

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x) = 0 \quad \text{\textit{всюду на}}\ [0, 1] \tag{1.11}$$

выполняется только в случае, когда $a_n = 0$ при $n = 0, 1, \cdots, N$, то есть функции $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{N}$ линейно независимы.

1.3 Приближение непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера

В этом разделе мы укажем оценку отклонения частичной суммы ряда Фабера-Шаудера от непрерывной функции в терминах модуля непрерывности и сформулируем теорему о базисности данной системы функций.

Определение 1.2. *Модулем непрерывности непрерывной на отрезке* $[0, 1]$ *функции* f *называется величина*

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$$

Теорема 1.1. *Для непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции f справедливо неравенство*

$$|f(x) - S_{2^n+k}(x)| \leq 2\omega\left(f, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

где $S_{2^n+k}(x)$ - частная сумма ряда по системе Фабера-Шаудера.

Из данной оценки непосредственно вытекает следующая

Теорема 1.2. *Система Фабера-Шаудера является базисом в пространстве непрерывных функции C[0,1], т.е. $\forall f \in C[0,1], f(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j \varphi_j(x)$, коэффициенты A_j вычисляются по формулам:*

$$A_0 = f(0),$$

$$A_1 = f(1) - f(0),$$

$$\dots$$

$$A_{2^n+k} = f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + f(\frac{k}{2^n}\right)\right)$$

и ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j \varphi_j(x)$ сходится равномерно.

2 Система Фабера-Шаудера на треугольной сетке в аффинных координатах.

2.1 Аффинная система координат на плоскости

Продолжим построение двумерного аналога функций Фабера-Шаубера, но, в отличии от предыдущего раздела будем делать это в аффинной системе координат.

Определение 2.1. *Система координат на плоскости задаваемая точкой O, называемой началом координат и двумя неколлинеарными единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, определяющими оси координат называется аффинной системой координат.*

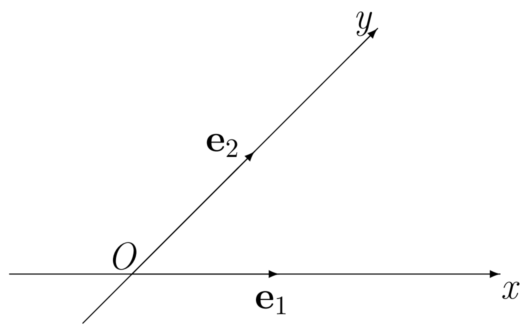

Рисунок 12.

Таким образом, прямоугольная декартова система координат, это частный случай аффинной системы, в случае если вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ перпендикулярны.

Мы будем рассматривать случай аффинной системы, когда угол между координатными векторам равен $\pi/3$, то есть треугольник, построенный на этих векторах, будет правильным.

Определение 2.2. *Пусть $\mathbb{R}^2$ двумерное Евклидово пространство. Векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, образуют нормированный базис в $\mathbb{R}^2$ и поэтому определяют в $\mathbb{R}^2$ аффинную систему координат. $\mathbb{R}^2$ с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ будем называть аффинным пространством и обозначать $\mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.*

Дадим определение целой точки в аффинном пространстве и понятие порядка целой точки.

Определение 2.3. *Точку $A = (k, l) = k\mathbf{e}_1 + l\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ будем называть целой, если $k, l \in \mathbb{Z}$. Точку*

$$A = \left(\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n}\mathbf{e}_1 + \frac{l}{2^n}\mathbf{e}_2$$

будем называть целой порядка n, если $k, l \in \mathbb{Z}$

Построение функций Фабера-Шаудера будем вести на треугольниках и порожденных ими шестиугольниках в аффинном пространстве. Дадим их определение.

Определение 2.4. *Пусть $(k, l) \in \mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Совокупность точек (A_1, A_2, A_3) из $\mathbb{R}^2$ будем называть треугольником и обозначать*

$\Delta(A_1, A_2, A_3)$. *Треугольник* $\Delta(A_1, A_2, A_3)$, *в котором* A_1, A_2, A_3 - *целые точки порядка* n, *будем называть элементарным треугольником порядка* n, *если* $\|A_1 - A_2\|_2 = \|A_3 - A_2\|_2 = \|A_1 - A_3\|_2 = \frac{1}{2^n}$

Определение 2.5. *Пусть* $(k, l) \in \mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. *Совокупность точек* $(k+0, l+1), (k+0, l-1), (k+1, l+0), (k+1, l-1), (k-1, l+0), (k-1, l+1)$ *из* $\mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *будем называть шестиугольником с центров* (k, l) *и обозначать* $Hex(k, l)$.

На рисунке 5 приведен шестиугольник $Hex(0, 0)$.

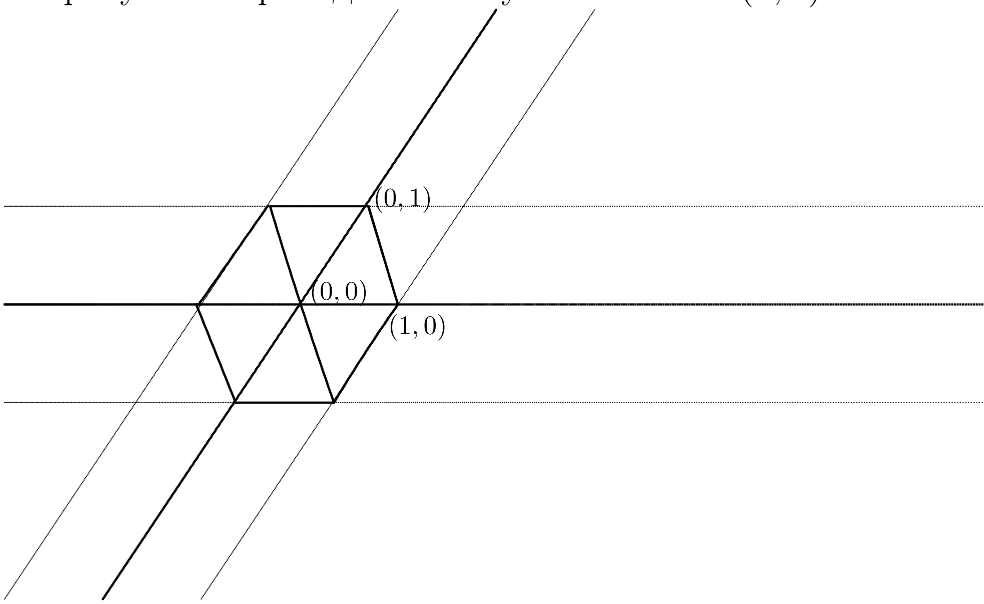

Рисунок 13.

Таким образом, пирамида, порожденная шестиугольником в аффинной системе координат определяется следующим образом.

Определение 2.6. *Пусть* $Hex(0, 0)$ – *шестиугольник в* $\mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *Функцию* $\Psi(x, y)$, *определенную в* $\mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *равенствами*

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{вне } Hex(0,0) \text{и на его границе} \\ 1, & (x,y) = (0,0) \\ \text{линейна и непрерывна} & \\ \text{на каждом треугольнике, составляющем } Hex(0,0), & \end{cases}$$

будем называть пирамидой с центром в точке $(0, 0) \in \mathbb{R}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

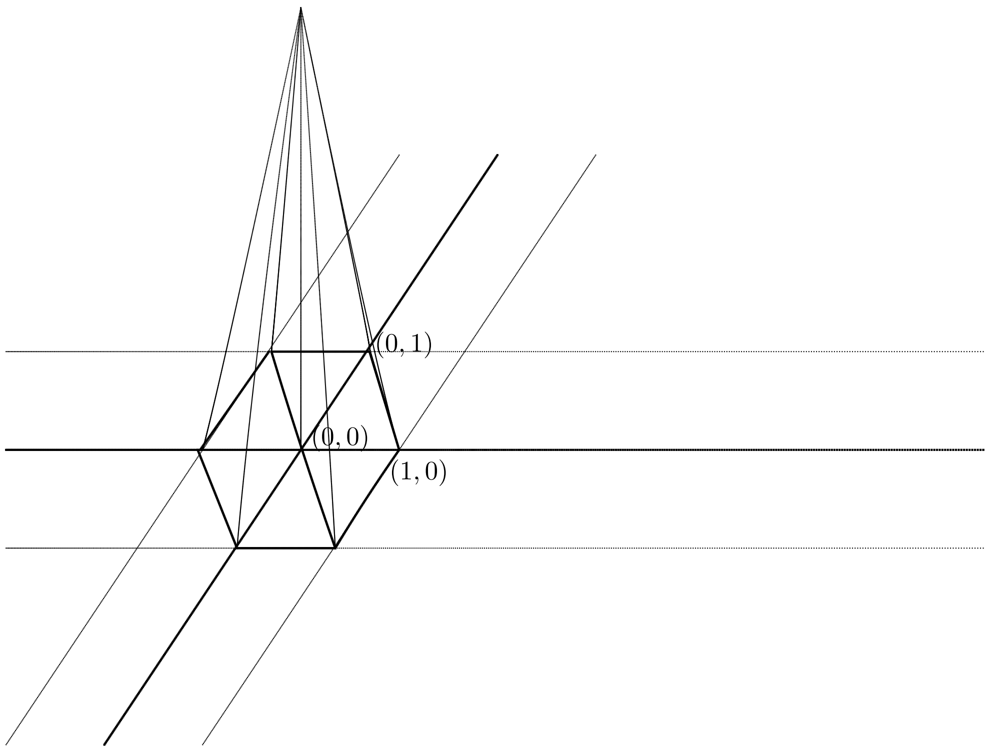

Рисунок 14.

Далее, сформулируем теорему показывающую явный вид введенной пирамиды в произвольном шестиугольнике.

Теорема 2.1. *Функция* $\Psi(x, y)$ *в шестиугольнике* $Hex(0, 0)$ *определена равенствами*

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} 1-x-y, & (x,y) \in \triangle^{(1)} \\ 1-x, & (x,y) \in \triangle^{(2)} \\ 1+y, & (x,y) \in \triangle^{(3)} \\ 1+x+y, & (x,y) \in \triangle^{(4)} \\ 1+x, & (x,y) \in \triangle^{(5)} \\ 1-y, & (x,y) \in \triangle^{(6)} \end{cases},$$

а в произвольном шестиугольнике Hex(k,l)

$$\Psi(x-k,y-l)=\begin{cases}(1+k+l)-x-y, & (x,y)\in\triangle_{k,l}^{(1)}\\(1+k)-x, & (x,y)\in\triangle_{k,l}^{(2)}\\(1-l)+y, & (x,y)\in\triangle_{k,l}^{(3)}\\(1-k-l)+x+y, & (x,y)\in\triangle_{k,l}^{(4)}\\(1-k)+x, & (x,y)\in\triangle_{k,l}^{(5)}\\(1+l)-y, & (x,y)\in\triangle_{k,l}^{(6)}\end{cases}$$

,
где (x, y) *- аффинная система координат.*

Таким образом, система функций $\{\Psi(x-k, y-l)\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ - и есть система Фабера-Шаудера построенная на шестиугольнике, порожденном правильными треугольниками в аффинной системе координат. Рассмотрим свойства данных функций.

Теорема 2.2. *Справедливо равенство*

$$\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}\Psi(x-k,y-l)=1$$

Теорема 2.3. *Пусть задана равномерная сетка в аффинной системе координат с углом* $\alpha = 60°$. *Пусть* $\Psi(x, y)$ *- функция Фабера-Шаудера,* $f(x, y)$ *- непрерывная в* $\mathbb{R}^2$ *функция. Тогда функция*

$$f_\Delta(x,y)=\sum_{k_1,k_2\in Z}f(k_1,k_2)\Psi(x-k_1,y-k_2) \tag{2.1}$$

является кусочно-линейной и интерполирует функцию $f(x, y)$ *в точках с целыми координатами .*

Заключение

В работе рассмотрена система Фабера-Шаудера на отрезке и на плоскости. На отрезке приведены функции системы, показана оценка отклонения частичных сумм. На плоскости рассмотрены два случая построения в разных системах координат. Проведен численный эксперимент. Цели и задачи работы выполнены.