Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ КРЕДИТОВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 218 группы
направления 01.4.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Недробова Николая Сергеевича

Научный руководитель
д. ф.-м. н. ______________ П. А. Терехин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

Введение Математические модели системы кредитования в настоящее время глубоко изучены и широко внедрены в практику экономической деятельности. Выделяют по крайней мере два класса математических моделей, охватывающих динамические процессы экономики вообще и процессы кредитования в частности. Безусловно актуальной представляется задача численного математического анализа непрерывных динамических моделей системы кредитования.

Целями работы являются:

— изучить теоретические аспекты системы кредитования и используемые на практике подходы к математическому моделированию процессов кредитования;
— исследовать численные методы решения дифференциальных уравнений с использованием функций Хаара, описать алгоритм построения приближенного решения, получить оценку уклонения приближенного решения от точного решения задачи Коши.

Основное содержание и структура работы.Работа состоит из введения и трех разделов, а также заключения и списка литературы.

Первый раздел посвящен теоретическим аспектам потребительского кредитования, его природе и сущности.

Потребительский кредит в товарной форме предоставляется преимущественно при продаже предметов длительного пользования-автомашин, холодильников, радиоприёмников, телевизоров, мебели - такой вид кредита называется покупкой в рассрочку. При анализе причин желания людей покупать товары в рассрочку, отмечалось следующее:

— очень удобная на практике форма оплаты товаров и услуг;
— такая форма оплаты позволяет осуществлять расходы в то время, когда доходы ещё не поступили;
— позволяет покупать товары и оплачивать услуги в течение более продолжительного периода, чем нормальный интервал между денежными поступлениями;
— позволяет человеку приобретать материальные финансовые активы, со стоимостью, превышающей сумму, которую он мог бы заплатить, исходя только из его собственных сбережений.

Теперь необходимо непосредственно определить какие же факторы могут влиять на потребительское кредитование. Несомненно, общая экономическая ситуация в стране, в реальном секторе экономики оказывает определяющее влияние и на всю финансово-банковскую систему. Более того, именно она определяет и направления государственной денежно-кредитной и финансовой политики. Антиинфляционная политика Центробанка, включающая повышение ставки рефинансирования и норматива обязательных резервов (политика «дорогих денег») снижает кредитный потенциал банковской системы. Экономический спад, падение числа экономических субъектов, имеющих доступ на рынок, обусловили падение спроса на банковские продукты. В потребительском кредитовании наблюдается сужение района и сферы деятельности, монополизация отдельных банков на локальных рынках.

По субъектам кредитной сделки различают:

— банковские потребительские кредиты;
— кредиты, предоставляемые населению торговыми организациями;
— потребительские кредиты кредитных учреждений небанковского типа (ломбарды, пункты проката, кассы взаимопомощи, кредитные кооперативы, строительные общества, пенсионные фонды и т.д.);
— личные или частные потребительские кредиты, предоставляемые частными лицами;
— потребительские кредиты, предоставляемые заёмщикам непосредственно по месту работы.

По срокам кредитования потребительские кредиты подразделяют на:

— краткосрочные (сроком от 1 дня до 1 года);
— среднесрочные (сроком от 1 года до 3-5 лет);
— долгосрочные (сроком выше 3-5 лет).

В целом представленная выше классификация отражает многообразие потребительских ссуд, но не исчерпывает всех возможных критериев классификации, поэтому её можно продолжить в зависимости от других признаков. Наибольшую популярность на сегодняшний момент завоевали краткосрочные ссуды на покупку товаров длительного пользования (бытовая техника, мебель) и услуг, долгосрочные ссуды (например, так называемое автокредитование) и ипотечное кредитование (кредиты на покупку жилья).

Рассмотрим процесс возрастания суммы возврата кредита при условии начисления $100r$ сложных процентов в год. Под сложными процентами понимаются проценты, насчитываемые не только на первоначальную величину, но и на проценты, уже наращенные на неё за предыдущий срок. Этот момент очень важно учитывать при расчёте сумм с учетом капитализации. Пусть Y_0 обозначает начальную денежную сумму, а Y_x — денежную сумму по истечении x лет. Если бы проценты начислялись один раз в год, мы бы имели

$$Y_x + 1 = (1 + r)Y_x,$$

где $x = 0, 1, 2, \ldots$ Вообще, если проценты начисляются n раз в год и x принимает последовательно значения $0, 1/n, 2/n, \ldots$, тогда

$$Y_{x+1/n} = (1 + r/n)Y_x,$$

То есть,

$$\frac{Y_{x+1/n} - Y_x}{1/n} = rY_x$$

Если мы обозначим $1/n = \Delta x$, то предыдущее равенство будет записываться следующим образом:

$$\frac{Y_{x+\Delta n} - Y_x}{\Delta x} = rY_x$$
$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = rY_x$$
$$Y_x' = rY_x$$

То есть при изменении x закон возрастания выражен дифференциальным уравнением 1-го порядка. Для последующего решения перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dY_x}{Y_x} = rdx \to dlnY_x = rdx \to \int dlnY_x = \int rdx \to lnY_x = rx + C$$

Откуда $Y_x = e^{rx+C}$ или $Y_x = We^{rx}$, где $W = e^C$.

Учитывая, что $Y(0) = Y$, то можно найти $W : Y_0 = We^0$, откуда следует, что $Y_0 = W$, а значит и конечная формула имеет вид:

$$Y_x = Y_0e^{rx}$$

Второй раздел посвящен численному решению с использованием функций Хаара.

Система функций Хаара $\chi_n(x)$, $x \in [0,1]$, $n = 0,1,\ldots$, определяется следующим образом. Пусть $\chi_0(x) = 1$ и для каждого натурального числа n по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0,1,\ldots$ и $j = 0,\ldots,2^k - 1$, положим

$$\chi_n(x) = \chi_{k,j}(x) = \begin{cases} 2^{k/2},\ x \in (j2^{-k}, (j+1/2)2^{-k}), \\ -2^{k/2},\ x \in ((j+1/2)2^{-k}, (j+1)2^{-k}), \\ 0,\ x \notin [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]. \end{cases}$$

В работе предложен способ нахождения приближенного решения дифференциального уравнения второго порядка посредством разложения искомого решения в ряд Фурье – Хаара. Поскольку система Хаара состоит из кусочно-постоянных функций, то возникает необходимость в замене оператора дифференцирования специально подобранным оператором, действующим на кусочно-постоянные функции. Мы ищем приближенное решение дифференциального уравнения при помощи разложения старшей производной в ряд Фурье – Хаара и восстанавливаем решение интегрированием.

Подробно опишем алгоритм построения приближенного решения на примере линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + a(x)y = b(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

с начальным условием $y(0) = y_0$. Предполагаем, что $a, b \in C[0,1]$.

Будем искать приближенное решение $y_n(x)$, представляя его производную в виде полинома по системе Хаара порядка не выше 2^n:

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \widetilde{y}_{n,k}\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} y_{n,k}\chi_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(x), \tag{2}$$

т.е. в виде кусочно-постоянной функции с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$, в которых значение полинома определяется так же, как и для функций Хаара. Для самого приближенного решения имеем

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \quad x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], \qquad (3)$$

- кусочно-линейная функция с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, где $0 < \theta_{n,k} < 1$. Мы покажем, что аппроксимативные свойства приближенного решения не зависят от выбора промежуточных точек, поэтому для определенности можно взять $\theta_{n,k} = 1/2$), при этом $x_{n,k}$ - середина отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$.

Потребуем, чтобы дифференциальное уравнение обращалось в равенство в точках$x_{n,k}$,$k = 0, \dots, 2^n - 1$. Получим систему уравнений

$$y'(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), \ k = 0, \dots, 2^n - 1, \qquad (4)$$

С учетом представления приближенного решения и его производной и обозначив $a_{n,k} = a(x_{n,k}), b_{n,k} = b(x_{n,k})$, находим

$$y_{n,k} + a_{n,k}(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + \theta_{n,k}2^{-n}y_{n,k}) = b_{n,k}, \ k = 0, \dots, 2^n - 1. \qquad (5)$$

Видим, что последние рекуррентные соотношения однозначно определяют значения $y_{n,k}, \ k = 0, \dots, 2^n - 1$, при условии $\|a\| = max_{0 \leqslant x \leqslant 1}|a(x)| \leqslant 2^n$. Поэтому при достаточно больших корректно определена кусочно-линейная функция $y_n(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению в точках $x_{n,k}, k = 0, \dots, 2^n - 1$.

Упростим рекуррентные соотношения, отбрасывая слагаемые, содержащие $\theta_{n,k}$. А именно, рассмотрим рекуррентные (для любого n) соотношения

$$z_{n,k} + a_{n.k}(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}) = b_{n,k}, \ k = 0, \dots, 2^n - 1. \qquad (6)$$

Положим $z'(x) = z_{n.k}, k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, k = 0, \dots, 2^n - 1,$ и $z_n(x) = y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}],$

$k = 0, \ldots, 2^n - 1$.

Теорема 1. Для произвольной функции $f \in (0, 1)$ ее ряд Фурье–Хаара сходится к $f(x)$ равномерно на $[0, 1]$. При этом:

$$p_C(f, N) = \|f - S_N(f)\|_c \leqslant 3\omega(\frac{1}{N}, f), \quad N \geq 1.$$

Теорема 2. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\|y' - z_n'\| \leqslant e^{\|a\|}(\Omega_n + Ce^{\|a\|}\Omega_n^*), \tag{7}$$

Лемма 1 Справедливы неравенства

$$Z_n \leqslant C_n e^{A_n} \leqslant Ce^{\|a\|}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Лемма 2. Имеет место оценка

$$\Delta_n \leqslant \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \leqslant \frac{2C\|a\|e^{3\|a\|}}{2^n}, \quad n \geqslant log_2\|a\| + 1.$$

В третьем разделе представлены результаты решения с использования функции Хаара. Рассмотрим алгоритм решения задачи (1).

Зафиксируем $n \leqslant 2$ и построим систему узлов $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $\theta_{n,k} = 1/2, k = 0, \ldots, 2^n - 1.0$

Вычисляем $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$.

Используя рекуррентные соотношения

$$z_{n,k} + a_{n,k}(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}) = b_{n,k}, \ k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

находим величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$

Восстановим функцию $z_n(x)$ по ее производной:

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \ x = (k + 1/2)2^{-n},$$

где $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Функция $z_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (9), где

$$a(x) = \begin{cases} x, \; x \in [0, 1/2], \\ 1 - x, \; x \in (1/2, 1], \end{cases} \qquad b(x) = 4\cos(4x) + a(x) * \sin(4x),$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Очевидно, что точное решение данной задачи есть $y(x) = \sin(4x)$.

В табл. 1 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге–Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка [0,1]. Точки выведены через одну для краткости изложения.

Таблица 1

x	$Y(x)$	$\|Y(x) - H(x)\|$	$\|Y(x) - RK(x)\|$
0.07813	0.30744	0.00021	0.06260
0.14063	0.53330	0.00012	0.06248
0.20313	0.72601	0.00015	0.06209
0.26563	0.87357	0.00048	0.06143
0.32813	0.96683	0.00078	0.06049
0.39063	0.99997	0.00089	0.05928
0.45313	0.97093	0.00071	0.05780
0.51563	0.88153	0.00014	0.05610
0.57813	0.73732	0.00069	0.05443
0.64063	0.54726	0.00157	0.05294
0.70313	0.32318	0.00239	0.05161
0.76563	0.07901	0.00304	0.05045

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (RH) и для метода Рунге–Кутта (RRK) составляют соответвтенно

$$R_H = 0.00366032835420937, \; R_{RK} = 0.0625980949896783.$$

Данный пример показывает, что в определенных случаях метод Хаара дает погрешность на порядок лучше, чем метод Рунге–Кутта.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + \sin(x)y = (2x + 1 + \sin(x)(x^2 + x)), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Точное решение данной задачи имеет вид $y(x) = x^2 + x$.

В табл. 2 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге–Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка [0,1].

Таблица 2

x	$Y(x)$	$\|Y(x) - H(x)\|$	$\|Y(x) - RK(x)\|$
0.07813	0.08423	0.00030	0.01582
0.14063	0.16040	0.00043	0.01571
0.20313	0.24438	0.00065	0.01554
0.26563	0.33618	0.00097	0.01531
0.32813	0.43579	0.00141	0.01502
0.39063	0.54321	0.00196	0.01468
0.45313	0.65845	0.00265	0.01430
0.51563	0.78149	0.00346	0.01387
0.57813	0.91235	0.00440	0.01341
0.64063	$1,05103$	0.00548	0.01292
0.70313	$1,19751$	0.00668	0.01241
0.76563	$1,35181$	0.00800	0.01188
0.82813	$1,51392$	0.00944	0.01134
0.89063	$1,68384$	0.01098	0.01079
0.95313	$1,86157$	0.01263	0.01025

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге–Кутта (R_{RK}) составляют соответственно

$$R_H = 0.0134854117964, \ R_{RK} = 0.015869140625.$$

В данном случае погрешности методов Хаара и Рунге–Кутта практически идентичны.

Заключение. В данной работе были изучены теоретические аспекты системы кредитования и используемые на практике подходы к математическому моделированию экономических процессов, и кредитования вчастности.

Также исследованы численные методы решения дифференциальных уравнений с использованием функций Хаара, описан алгоритм построения приближенного решения, получена оценка уклонения приближенного решения от точного решения задачи Коши. Получены новые результаты численного эксперимента. Сделан вывод, что в определенных случаях метод Хаара дает погрешность на порядок лучше, чем метод Рунге–Кутта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Макаров, С.И. Математические модели финансовых операций : Учебное пособие / С.И. Макаров, Б.П. Чупрынов. М.: изд-во СГЭА, Самара 2005. 136 с.

2 Здрогова, М.А., Лукомский, Д.С., Недробов, Н.С., Терехин, П.А., Царева, В.Г. Применение функций Хаара к численному решению линейных дифференциальных уравнений / Математика: фундаментальные и прикладныеисследования и вопросы образования, материалы международной научнопрактической конференции, 26-28 апреля 2016 года / под общ. ред. канд.физ.-мат. наук, доц. Е.Ю. Лискиной; Ряз. гос. ун-т имени С.А. Есенина. Рязань, 2016. 89-91 с

3 Жегалов, В.И. Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений. / В.И. Жегалов, С.Н. Киясов. М.: Издательство казанского государственного университета, 2007. 179 с.

4 Романовский, М.В. Финансы, денежное обращение и кредит: Учебное пособие / М.В. Романовский. М.: Юрайт-Издат, 2007. 543 с.

5 Лукомский, Д.С. Применение системы Хаара для решения задачи Коши Т. 14. / Д.С. Лукомский, М.: Математика. Механика, 2012. 47 с.

6 Лукомский, Д.С. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка Т. 16. / Д.С. Лукомский, С.Ф. Лукомский, П.А. Терехин, М.: Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2016. вып. 2.

7 Красс М.С. Математика для экономистов: учебное пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Питер, 2010. – 464 с.