Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ СО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ КОМПОНЕНТАМИ.

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Федоровой Карины Андреевны

Научный руководитель
д. ф.-м. н. ______________ А. Л. Лукашов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы разбираем модель рынка, впервые появившуюся в [1], наследующую известную многомерную модель Блэка-Шоулза (см. [2-4,5] и ссылки в них) для случая, когда цены активов коррелируют не только с ошибками, но и между собой.

На самом деле, цены на рынке акций отдельных компаний влияют друг на друга не только рыночными неизвестными (которые используются как основные переменные в многомерной модели Блэка-Шоулза), но также многими экономическими факторами; например, у компаний возможен один и тот же конечный рынок потребителей или рынок ресурсов, или они принадлежат к смежным отраслям и взаимно влияют друг на друга.

В этой модели цены рискованных активов (по предположению) удовлетворяют требованиям общих многомерных линейных стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативной погрешностью. Такие уравнения расширяют многомерную модель Блэка-Шоулза и сводятся к ней в случае, когда соответствующие коэффициенты образуют диагональную матрицу. В этом случае наличие ненулевых вне-диагональных элементов (коэффициентов диффузии, иначе - матрицы волатильности) позволяет охватить некоторые интересные приложения, например: возможное банкротство для некоторой компании, чьи акции продаются на рынке (случай, когда соответствующие цены акций могут досчить нуля и никогда не окупятся).

Работа организована следующим образом: в главе 1 мы приводим некоторый теоретический материал (заимствованный из книги [6]), используемый в дальнейших математических рассуждениях, а конкретнее вывод, обоснование используемых в работе формул Ито.

В главе 2 мы описываем модель рынка в деталях. А также показываем, как она сводится к многомерной модели Блэка-Шоулза в специальном "диагональном"случае.

В главе 3 мы опишем явные решения для уравнений цен на акции в следующих случаях: в "Абелевом"случае и в "разрешимом случае". Покажем, что решение основного уравнения для эволюции цен на акции может быть построено с помощью некоторого итерационного метода.

Материал глав 2 и 3 представляет собой детализированное изложение материала статьи [10].

В главе 4 рассматривается построение модели рынка со взаимодействующими акциями. Модель рынка, наследующую известную многомерную модель Блэка-Шоулза для случая, когда цены активов взаимодействуют не только со стандартными регрессорами, но и между собой.

На самом деле, цены на рынке акций отдельных компаний влияют друг на друга не только рыночными неизвестными (которые используются как основные переменные в многомерной модели Блэка-Шоулза), но также многими экономическими факторами; например, у компаний возможен один и тот же конечный рынок потребителей или рынок ресурсов, или они принадлежат к смежным отраслям и взаимно влияют друг на друга. В этой главе выполняетяс доказательство существования рынка с тремя взаимодействующими акциями, построение этой модели и приведение программного обеспечения, расчитывающего цены акций по вышеуказанным расчетам модели.

Рассмотрим σ-алгебру $F_r \times \beta$ - наименьшую σ-алгебру, порожденную наборами (A,B), где $A \in F_T, B \in \beta, F_t$ - стандартная броуновская фильтрация, β—борелевская σ-алгебра на [0,T].

Функция $f(\omega, t)$ предполагается измеримой относительно $F_t \times \beta$ (обозначается $f \in F_t \times \beta$). Кроме того, предполагаем, что функция f — предсказуема, т.е. при всех $t \in [0, T]$

$$f(\omega, t) \in F_t$$

, другими словами, f полностью определяется информацией к моменту t.

Класс $H^2[0, T]$ состоит из всех измеримых предсказуемых функций f таких, что

$$E\left(\int_0^T f^2(\omega, t)dt\right) < \infty$$

. Норма в $H^2[0, T]$ определяется как

$$||f||_{H^2} = ||f||_{L^2(dP \times dt)} = \left(E\left(\int_0^T f^2(\omega, t)dt\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Определим сначала стохастический интеграл для класса функция $H_0^2[0, T]$, т.е. функций, представимых в виде

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) II_{(t_i, t_{i+1})}(t),$$

где $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$, $a_i \in F_{t_i}$ (т.е. полностью определены к моменту t_i), $E(a_i^2) < \infty$ (из чего следует конечность $||f||$).

Для таких функций интеграл Ито определяется как сумма

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)).$$

Определение 1.1 Неубывающая последовательность моментов остановки $\{\nu_n\}$ называется $H^2[0, T]$-локализующей для f, если

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t) II_{\{t \leq \nu_n\}} \in H^2[0, T]$$

при всех натуральных n и

$$P\left(\cup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \nu_n = T\}\right) = 1.$$

Легко видеть, что для $f \in L^2_{loc}$ моменты остановки

$$\tau_n := inf\left\{s : \int_0^s f^2(\omega,t)dt \geq ns \geq T\right\}$$

образуют $H^2[0,T]$-локализующую последовательность.

Пусть теперь $f \in L^2_{loc}$ и $\{\nu_n\} - H^2[0,T]$-локализующая последовательность. Положим

$$g(\omega,s) = f(\omega,s)II_{\{s\leq\nu_n(\omega)\}}.$$

Обозначим через $\{X_{t,n}\}$ непрерывный мартингал, равный интегралу Ито

$$\int_0^t g(\omega,s)dB_s.$$

Интеграл Ито от $f \in L^2_{loc}$ определяется как предел процессов $\{X_{t,n}\}$ при $n \to \infty$, т.е. такой случайный процесс $\{X_t\}$, что при всех $t \in [0,T]$

$$P\left(X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t,n}\right) = 1.$$

Далее под обозначением

$$\int_0^t f(\omega,s)dB_s$$

будет пониматься именно этот процесс. При этом можно доказать, что данное определение корректно, т.е. интеграл определен и не зависит от выбора локализующей последовательности. Кроме того, оказывается, что для каждой функции $f \in L^2_{loc}$ существует непрерывный локальный мартингал, совпадающий с только что определенным интегралом почти наверное. В дальнейшем

$$\int_0^t f(\omega,s)dB_s$$

для $f \in L^2_{loc}$ будет считаться локальным мартингалом. При этом локализующие последовательности в смысле определений локального мартингала и в смысле определения пространства L^2_{loc} совпадают.

Глава 2. Модель рынка

Пусть $(\omega, F, (F_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ будет сортированное вероятностное пространство, на котором определено стандартное d-мерное Броуновское движение $W_t, 0 \leq t \leq T$. Предположим, для простоты, что базовая фильтрация F_t порождается Боуновским движением W: $F_t = F_t^W$.

Мы рассмотрим финансовый рынок с одним не рисковым активом (акцией), имеющий цену b_t, время t, n рисковых активов (акций) с вектором цен $S_t = (S_t^1, ..., S_t^n)$ современем t. Предположим, что цена облигаций развивается со временем следующим образом:

$$db_t = r_t b_t dt, \qquad b_0 > 0, \qquad\qquad (2.1)$$

где процентная ставка процесса $r_t, 0 \leq t \leq T$ предполагается ограниченной, неотрицательной и прогрессивно измеримой. Без потери общности, допустим, что $b_0 = 1$.

Введем случайное соответствие $B_t : R^n \to L(R^d; R^n)$ данное для каждого $t \in [0; T]$ и для каждого ω, определенное следующей формулой:

$$B_t(x)y = \sum_{j=1}^{d} B_t^j x(y, e_j), \quad t \in [0; T], \quad x \in R^n, \qquad y \in R^d \qquad (2.2)$$

Здесь, $B_t^j \in L(R^n), j = 1, ..., d, t \in [0; T]$, является множеством операторозначимых стохастических процессов, $\{e_j\}_{j=1}^d$ есть ортонормированный базис в R^d, и $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в R^d. Описание развития цен акций содержится в процессе-векторе, рассмотрим следующее линейное стохастическое дифференциальное уравнение с мультипликативной погрешностью (см [7,8,9] и ссылки там):

$$d\tilde{S}_t = A_t \tilde{S}_t dt + B_t(\tilde{S}_t) dW_t, \qquad \tilde{S}_0 \equiv x_0 \in R^n \qquad (2.3)$$

или равнозначно

$$d\tilde{S}_t = A_t \tilde{S}_t dt + \sum_{j=1}^{d} B_t^j \tilde{S}_t d\beta_t^j, \qquad \tilde{S}_0 \equiv x_0 \in R^n \qquad (2.4)$$

где $\beta_t^j, 0 \leq t \leq T, j = 1, ..., d$ есть одномерный независимый стандартный Винеровский процесс: $\beta_t^j = (W_t, e_j)$. Предположим, что A_t и B_t^j $0 \leq t \leq T, j = 1, ..., d$, удовлетворяют следующим условиям:

(E) A_t и B_t^j прогрессивно измеримы и такие, что решение (2.4) существует и единственно на интервале $[0, T]$ для каждого начального вектора $x_0 \in R^n$, постоянный или независимый от $\beta_t^i, 0 \leq t \leq T$ (см. [1,7])

Предположим, что для каждого i=1,...,n, $\tilde{S}_t^i \equiv x_0^i > 0$. Для каждого процесса $\tilde{S}_t^i$, определим начальное время со следующими настройками $T_0^i = inf 0 \leq t \leq T; \tilde{S}_t^i \equiv 0$, тогда развитие цен на акции $S_t^i, 0 \leq t \leq T, i = 1, .., n$ определяются следующим образом:

$$S_t^i = \left\{ \tilde{S}_{t \wedge T_0^i}^i, F_t, 0 \leq t \leq T \right\}, \qquad S_0^i = \tilde{S}_0^i \equiv x_0^i > 0, \qquad i = 1, ..., n \qquad (2.5)$$

Пусть M будет рыночная модель, соответствующая (2.1),(2.4),(2.5).

Замечание 1 Модель M представляет многомерную модель Блэка - Шоулза (см. [9] и ссылки там) в частном случае, когда матрицы A_t и $B_t^i, j = 1, ..., d$, в диагональном случае и удовлетворяют следующему

$$a_t^{ii} = \mu_t^i, \quad b_j^{ii}(t) = \sigma_t^{ij}, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., d, \qquad (2.6)$$

где $\mu_t = (\mu_t^1, \mu_t^2, ..., \mu_t^n)$ есть вектор ожидаемого результата и $\sigma = \left\{ \sigma_t^{ij} \right\}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., d$, есть матрица волатильности (a_t^{ik} и $b_j^{ik}(t)$ есть ik-тые элементы матриц A_t и B_t^j соответственно).

В настоящей модели, процессы A_t и $B_t(\tilde{S}_t), 0 \leq t \leq T$ представляют собой аналоги средней доходности и волатильности, соответственно.

Глава 3. Цены акций

Существование и единственность решения уравнения (2.4) были широко изучены (см. [1,4] и ссылки в них). В основном случае, решение уравнения (2.4) может быть построено некоторым итеративным методом (см. [4, глава 6.1]). В этой главе, мы решим уравнение (2.4) явно в некоторых специальных случаях.

Разрешимый случай

Введем матрицу линейных операторов $B_t^k, k = 1, ..., d$, имеющую нижнетреугольную форму (см. 11 для случая, когда коэффициенты постоянны) и пусть A_t имеет диагональную форму $A_t = diag(a_t^i)$, $i = 1, ..., n$. Тогда система

$$d\tilde{S}_t = A_t \tilde{S}_t dt + \sum_{j=1}^{d} B_t^j \tilde{S}_t d\beta_t^j \quad ; \quad \tilde{S}_0 \equiv x_0 \in R^n$$

может быть переписана следующим образом

$$d\tilde{S}_t^i = a_t^i \tilde{S}_t^i dt + \tilde{S}_t^i \sum_{k=1}^{d} b_k^{ii}(t) d\beta_t^k + \sum_{k=1}^{d} \gamma_k^i(t,\beta) d\beta_t^k, \quad ; \quad \tilde{S}_0 \equiv x_0 \in R^n \qquad (3.10)$$

где

$$\gamma_k^i(t,\beta) \equiv \gamma_k^i(t, \beta^1(\cdot), ..., \beta^d(\cdot)) = \sum_{r=1}^{i-1} b_k^{ir}(t) \tilde{S}_t^r, \quad i = 1, ..., n. \quad (3.11)$$

Теорема 4.4

Пусть $\Phi(t)$ фундаментальная матрица, соответствующая однородному уравнению

$$d\Phi(t) = F(t)\Phi(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)\Phi(t)dW_i(t) \quad (3.12)$$

здесь $\Phi(t)$ матрица $n \times n$, решение (12), которая удовлетворяет следующему условию: $\Phi(0) = I$. Отсюда следует, что решение следующего уравнения

$$dX(t) = [f(t) + F(t)X(t)]dt + \sum_{i=1}^{m} [g_i(t) + G_i(t)X(t)]dW_i(t) \qquad (3.13)$$

может быть записано таки образом:

$$X(t) = \Phi(t) \left\{ X(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s) \left[f(s) - \sum_{i=1}^{m} G_i(s) g_i(s) \right] ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s) \sum_{i=1}^{m} g_i(s) dW_i(\right.$$

Докажем теорему 4.4 при условии, что решение уравнения (12) имеет вид

$$\Phi(t) = exp\left\{ \left(F - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} G_i^2 \right) t + \sum_{i=1}^{m} G_i W_i(t) \right\},$$

и матрицы F и G_i попарно коммутируют между собой ($FG_i = G_iF, G_iG_j = G_jG_i$ для всех i,j). Докажем, что наше допущение обоснованно:

Нам дано:

$$\Phi(t) = exp\left\{\left(F - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} G_i^2\right)t + \sum_{i=1}^{m} G_iW_i(t)\right\}$$

Найдем значение выражения $d\Phi$ по формуле Ито для матриц, описанной в Главе 1:

$$d\Phi(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}f_i + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}g_{ik}g_{jk}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m}g_{ij}dW_j$$

$$= \left(\left(F - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}G_i^2\right)\Phi(t) + \Phi(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}G_i^2\Phi(t)\right)dt + \Phi(t)\sum_{i=1}^{m}G_i(t)dW_i(t)$$

$$= F(t)\Phi(t)dt + \Phi(t)\sum_{i=1}^{m}G_i(t)dW_i(t)$$

Главная теорема.

Введем процесс дисконтирования цены акции $Z_t = (Z_t^1, ..., Z_t^n) : Z_t = \frac{1}{b_t} S_t = e^{-\int_0^t r_u du} S_t$. По формуле Ито, легко видеть, что из (1) и (4) следует

$$dZ_t = (A_t - r_t I) Z_t dt + \sum_{j=1}^{d} B_t^j Z_t d\beta_t^j \qquad (18)$$

Теорема 4. Предположим, что коэффициенты $r_t, A_t, B_t, o \leq t \leq T, j = 1, ..., d$ модели $\overline{M}$ определяются условием (E). Пусть, более того, условия (B) и (N) сохраняются.

Тогда модель $\overline{M}$ без арбитражная и завершенная.

Доказательство

Решение η_t уравнения (A.1) определяется как

$$\eta_t = (\Gamma_t^Z)^{-1} y_t \quad \forall \;\; t \in [0; T]$$

Здесь, $\Gamma_t^Z = \{\gamma_t^{jk}\}_{j,k=1,...,n}$ является (неединственной) матрицей Грама, основанной на множестве векторов $U_t^j(Z_t) = B_t^j Z_t, \quad j = 1, ..., n$ (Z_t решение (18)): $\gamma_t^{jk} = (U_t^j(Z_t), U_t^k(Z_t))$ (с $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в R^n); и $y_t = (y_t^1, ..., y_t^n), 0 \leq t \leq T$ данные следующей формулой

$$y_t^j = ((A_t - r_t I) Z_t, U_t^j(Z_t)). \qquad (A.5)$$

Легко показать (см. [6, Глава 6.2,стр. 310]) что

$$\parallel \eta_t \parallel^2 \leq \left(sup_{1\leq j\leq n} \parallel B_t^j Z_t \parallel^4 \right)^{-1} \parallel (A_t - r_t I) Z_t \parallel^2 \sum_{j=1}^{n} \parallel B_t^j Z_t \parallel^2 \leq \frac{n}{\alpha} \parallel (A_t - r_t I) \parallel^2 \leq C$$

для постоянного C>0 (не зависящего от ω и t) и с $\alpha = min_{1\leq j\leq n}\{\alpha^j\}$.

Таким образом, с учетом условий выше, $\eta_t, 0 \leq t \leq T$, равномерно ограниченное в (t, ω). Более того, (N)сохраняется автоматически. Что и требовалось доказать.

Для завершения части Теоремы 4, осталось показать, что для каждой M_t с мартингальной мерой $P*$ сущетсвует предсказуемый R^n-значный стохастический процесс $H_t = (H_t^1, ..., H_t^n), 0 \leq t \leq T$, такой, что стохастический интегралл $\int_0^t (H_u, dZ_u)$ четко определен и такой, что

$$M_t = M_0 + \int_0^t (H_u, dZ_u).$$

В этом случае, эквивалентная мартингальная мера P^*, введеная ранее, уникальна. Более того, рынок определен, завершен с учетом $\tilde{S}_t = \Phi_t x_0, \quad \Phi_t = expG_t$.

Из этого выведем

$$\eta_t = \Gamma_t^Z h_t$$

для каждого $t \in [0; T]$, где $h_t = (h_t^1, ..., h_t^n)$ и Γ_t^Z матрица Грама для системы $U_t^k, \quad k = 1, ..., n$. Наконец, это дает следующее выражение для последнего интегралла:

$$I_t = \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \sum_{m=1}^n h_u^m (U_u^m)_i \sum_{l=1}^n h_u^l (U_u^l)_i \sum_{k=1}^n (U_t^k)_i (U_t^k)_j dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^t \left(\sum_{m=1}^n \gamma_u^{km} h_u^m \right) \left(\sum_{l=1}^n \gamma_u^{kl} h_u^l \right), \;\; 0 \leq t \leq T,$$

где $\gamma_t^{km} = \gamma_t^{mk}$ пространство симметричных несингулярных (для каждого $t \in [0; T]$) матриц Грама Γ_t^Z. По последней выкладке видим

$$I_t = \int_0^t \parallel \Gamma_u^Z h_u \parallel^2 du = \int_0^t \parallel \eta_u \parallel^2 du.$$

этот процесс является непрерывным; следовательно, по ранее выведенному, частично интегрируем под P^*. Что и требовалось доказать.

$$dS_t = r_t S_t dt + \sum_{j=1}^n B_t^j S_t d\beta_t^{j*}. \qquad (22)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате этой работы мы разобрали модель рынка, впервые появившуюся в [1], наследующую известную многомерную модель Блэка-Шоулза (см. [2-4,5] и ссылки в них) для случая, когда цены активов коррелируют не только с ошибками, но и между собой.

Мы рассмотрели случаи, когда цены на рынке акций отдельных компаний влияют друг на друга не только рыночными неизвестными (которые используются как основные переменные в многомерной модели Блэка-Шоулза), но также многими экономическими факторами; например, у компаний возможен один и тот же конечный рынок потребителей или рынок ресурсов, или они принадлежат к смежным отраслям и взаимно влияют друг на друга.

В этой модели цены рискованных активов (по предположению) удовлетворяют требованиям общих многомерных линейных стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативной погрешностью. Такие уравнения расширяют многомерную модель Блэка-Шоулза и сводятся к ней в случае, когда соответствующие коэффициенты образуют диагональную матрицу. В этом случае наличие ненулевых вне-диагональных элементов (коэффициентов диффузии, иначе - матрицы волатильности) позволяет охватить некоторые интересные приложения, например: возможное банкротство для некоторой компании, чьи акции продаются на рынке (случай, когда соответствующие цены акций могут досчить нуля и никогда не окупятся).

В работе достигнуты следующие результаты: в главе 1 мы привели некоторый теоретический материал (заимствованный из книги [6]), используемый в дальнейших математических рассуждениях, а конкретнее вывод, обоснование используемых в работе формул Ито.

В главе 2 мы описали модель рынка в деталях. А также показали, как она сводится к многомерной модели Блэка-Шоулза в специальном "диагональном"случае.

В главе 3 мы описали явные решения для уравнений цен на акции в следующих случаях: в "Абелевом"случае и в "разрешимом случае". Показали, что решение основного уравнения для эволюции цен на акции может быть построено с помощью некоторого итерационного метода.

Материал глав 2 и 3 представлял собой детализированное изложение материала статьи [10].

В главе 4 рассматрели построение модели рынка со взаимодействующими акциями. Модель рынка, наследующую известную многомерную модель Блэка-Шоулза для случая, когда цены активов взаимодействуют не только со стандартными регрессорами, но и между собой.

Выполнено построение рынка с двумя взаимодействующими акциями. Выполнено построение условий существования модели рынка с тремя взаимодействующими акциями и самой модели.

Приведен процесс разработки программного обеспечения, позволяющего прогнозировать поведения трёх взаимодействующих акций (основываясь на материалах из источника [26]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Albeverio, S. A model of financial market with several interacting assets. Complete market case / Albeverio S., Steblovskaya V. A, Fin. and Stoch. 2002.

2 Karatzas, I. Brownian motion and stochastic calculus / Karatzas I., Shreve S. Berlin; Heidelberg; New York:Springer, 1997.

3 Karatzas, I. Lectures on the mathematics of finance / Karatzas, I., Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1996. (CRM Monogr. Ser.; V. 8).

4 Lamberton, D. Hedging index options with few assets / Lamberton D., Lapeyre B; Math. Fin. 1993. V. 3. P. 25-42.

5 Oksendal, B. Stochastic differential equations / Oksendal B.; Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1995.

6 Gard, T. Introduction to stochastic differential equation / Gard T.; New York; Basel: M. Dekker, 1988. (Pure and Appl. Math.; V.144).

7 Arnold, L. Stochastische Differentialgleichungen / Arnold L.; Munchen; Wien: R. Oldenbourg Verl., 1973.

8 Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / Da Prato G., Zabczyk J.; Cambrige: Cambrige Univ. Press, 1992.

9 Гихман, И.И. Стохастические дифференциальные уравнения / Гихман И.И., Скороход А.В.. Киев: Наук. думка, 1968.

10 Albeverio, S.A. Financial Market with Interacting Assets. Prising Barrier Options / Albeverio S.A., V. R. Steblovskaya; Труды Математического Института им. Стеклова, 2002, V. 237, 173-184.

11 Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, Наука, М., 1986 mathscinet

12 Jacod J., Calcul stochastique et proble?mes de martingales, Lect. Notes Math., 714, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979 mathscinet zmath

13 Жакод Ж., Ширяев А.?Н., Предельные теоремы для случайных процессов, Т. 1, 2, Физматлит, М., 1994

14 Karatzas I., Lectures on the mathematics of finance, CRM Monogr. Ser., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996 mathscinet zmath

15 Karatzas I., Shreve S., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997 mathscinet zmath

16 Lamberton D., Lapeyre B., “Hedging index options with few assets”, Math. Fin., 3 (1993), 25–42 crossref

17 Linetsky V., “The path integral approach to financial modeling and option pricing”, Comput. Econ., 11 (1998), 129–163 crossref zmath

18 Meyer P.-A., “Un cours sur les inte?grales stochastiques”, Se?minaire de Probabilite? X, Lect. Notes Math., 511, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976, 245–400 mathscinet

19 Musiela M., Rutkowski M., Martingale methods in financial modelling, Appl. Math., 36, Springer, Berlin, 1997 mathscinet zmath

20 Oksendal B., Stochastic differential equations, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1995 mathscinet

21 Protter Ph., Stochastic integration and differential equations. A new approach, Appl. Math., 21, Springer, Berlin, 1990 mathscinet zmath

22 Rich D., “The valuation and behavior of Black–Scholes options subject to intertemporal default risk”, Rev. Deriv. Res., 1 (1996), 25–61 crossref

23 Ширяев А.Н., Основы стохастической финансовой математики, Т. 1, 2, Фазис, М., 1998; Англ. пер.: Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory, World Sci., Singapore, 1999 mathscinet zmath

24 Zhang P., “A unified formula for outside barrier options”, J. Fin. Eng., 4:4 (1995), 335–349

25 Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения (четвертое издание, исправленное и дополненное). – Спб.: Издательство Политехнического университета, 2010. – 816 С.

26 Мееров И.Б., Сысоев А.В. Лабораторная работа Численное решение стохастических дифференциальных уравнений на примере моделирования финансового рынка, Образовательный комплекс «Параллельные численные методы»; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского Факультет вычислительной математики и кибернетики; Нижний Новгород 2011