Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ПРЕДПРИЯТИЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ УПРАВЛЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Голышкина Николая Игоревича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени возникают при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Часто такие задачи связывают с исследованием процессов экономического роста. Этим обусловлено их название — задачи оптимального экономического роста. Максимизируемый функционал полезности в задачах оптимального экономического роста имеет специальный вид. Он задается несобственным интегралом, содержащим экспоненциальный дисконтирующий множитель [1, 2].

В настоящей работе рассматривается модель экономического роста предприятия односекторной экономики с бесконечным горизонтом управления. Тема является актуальной, так как задача оптимального экономического роста моделирует производство с учетом ограничений, что позволяет оценить результат, определяющий распределение средств между производством и потреблением. Кроме того, возможно дальнейшее развитие модели Рамсея.

Целями данной работы являются:

1. Изучение модели экономического роста предприятия односекторной экономики с бесконечным горизонтом управления;
2. Получение необходимых условий оптимальности управления в одной задаче экономического роста;
3. Численное решение поставленной задачи методом условного градиента.

Научная новизна заключается в следующем:

— исследована задача модели Рамсея с ограничением на фондовооруженность;

— доказаны необходимые условия экстремума для задачи с переменным горизонтом управления.

Практическая значимость проделанной работы состоит в написании программы, которая вычисляет оптимальное управление, оптимальную траекторию и интегральный критерий качества в одной задаче экономического роста методом условного градиента. Данный метод используется при решении задач нелинейного программирования [3-10].

Основные результаты магистерской работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. Всероссийская студенческая научная конференция «Экономика и управ-

ление: проблемы, тенденции, перспективы» (Саратов, апрель 2016);

2. V Международная молодежная научно-практическая конференция «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками» (Саратов, ноябрь 2016).

Основные результаты опубликованы в работах [11, 12].

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Магистерская работа состоит из введения, трех теоретических и одной практической главы, заключения, приложения и списка использованных источников.

В первой главе "Модель Рамсея" описывается неоклассическая модель оптимального экономического роста. Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$. Следовательно,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \quad \forall t \geq 0. \tag{1}$$

Функция F называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном множестве

$$G = \{(K, L) \in R^2 : K > 0, L > 0\},$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим «неоклассическим» условиям для всех $K > 0$, $L > 0$:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0,$$

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty, \qquad \lim_{L \to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty,$$

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \qquad \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0.$$

Также предполагается, что F положительно однородная, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \qquad \forall \lambda > 0, \quad K > 0, \quad L > 0.$$

В качестве производственной функции рассматривается классическая функция Кобба-Дугласа [13-17]:

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где $F(K, L)$ — объем выпускаемой продукции; K — объем основного капитала; L — затраты труда; A, α, β — коэффициенты, удовлетворяющие условиям:

$$A > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Коэффициент A предназначен для перевода единиц измерения труда и капитала в единицы измерения продукта; коэффициенты α и β отражают вклад труда и капитала в изготовление продукта.

Функция $F(K, L)$ является однородной функцией, что легко показать следующим образом:

$$F(\lambda K, \lambda L) = AK^{\alpha}L^{\beta}\lambda^{\alpha+\beta} = AK^{\alpha}L^{\beta}\lambda = \lambda F(K, L).$$

Функция Кобба-Дугласа является чрезвычайно удобным математическим инструментом для описания производственного процесса, что предопределило ее роль как одной из наиболее популярных производственных функций в прикладных экономических исследованиях.

Во второй главе "Элементы теории оптимального управления" раскрыты некоторые сведения из теории оптимального управления, которые необходимы для практической части работы. Рассматриваются следующие понятия: функционал и его оптимизация, общая постановка задачи оптимального управления, исследование задач на экстремум, необходимое условие экстремума для нелинейной задачи (метод Дубовицкого-Милютина), принцип максимума Понтрягина.

Определение 1. Пусть имеется некоторое функциональное пространство $\mathfrak{R}$ и в нем зафиксировано некоторое подмножество $X \subset \mathfrak{R}$. Отображение $I : X \to R$, ставящее в соответствие каждой функции $f \in X$ определенное число $I(f)$, называют функционалом.

Всякое управление $u = u(t)$ с кусочно-непрерывными компонентами, удовлетворяющее условию $u(t) \in U$ при всех $t \in [t_0, T]$, называют допустимым управлением.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r), \\ ... \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r). \end{cases} \tag{2}$$

Для того, чтобы сформулировать задачу оптимального управления, необходимо задать условие, которое позволяет отличать друг от друга более и менее выгодные решения данной задачи. Для этой цели служит критерий оптимальности (критерий качества управления или целевой функционал):

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_r(t))dt, \tag{3}$$

где $f_0(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_r(t))$ — фиксированная функция $n+r+1$ переменных. Для определенности будем считать, что чем больше значение критерия оптимальности $I(u)$, тем более выгодным является данное управление u. Тогда самым выгодным будет управление, которое доставляет наибольшее возможное значение интегральному функционалу (3).

Таким образом, задача оптимального управления для системы дифференциальных уравнений (2) заключается в максимизации интегрального функционала (3) на множестве всех допустимых управлений, переводящих систему (2) из заданного начального состояния в заданное конечное.

Принцип максимума Понтрягина — это определенного типа необходимое условие экстремума, которое дает возможность среди всех возможных допустимых процессов выделить те, которые могут претендовать на роль оптимальных.

Теорема 2 (принцип максимума Понтрягина). Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ — оптимальный процесс в задаче оптимального управления. Тогда существует вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t))$, удовлетворяющая вместе с данным процессом следующим условиям:

1. Функция $H(t, x, \psi, u)$ достигает максимального значения по u при $x = x^*(t)$, $\psi = \psi(t)$ на значении $u = u^*(t)$ при всех $t \in [0, T]$.

2. Переменные $\psi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t, x, \psi(t), u^*(t))}{\partial x^i}, \qquad i = 1, ..., n.$$

3. В конечный момент времени $t = T$ оптимальная траектория удовлетворяет условиям трансверсальности:

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}, \qquad i = m+1, ..., n.$$

В третьей главе "Метод условного градиента" рассматривается метод условного градиента и сходимость данного метода.

Пусть имеется задача минимизации следующего вида [18]:

$$J(u) \longrightarrow \inf, \qquad u \in U.$$

Идея метода условного градиента основана на том, что в окрестности точки u_k функционал $J(u)$ можно приближенно представить как

$$J(u) \simeq J(u_k) + \langle J'(u_k), u - u_k \rangle.$$

Так как $J(u_k)$ близко к $J(u)$, то мы стараемся минимизировать скалярное произведение $J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle$. Введем обозначение

$$\bar{u}_k = \arg\min_{u \in U} J_k(u).$$

Тогда итерационная последовательность рассматриваемого метода описывается как

$$u_{k+1} = u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k), \tag{4}$$

где

$$\alpha_k = \arg\min_{0 \le \alpha \le 1} J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)).$$

Другой способ вычисления значения α_k заключается в том, что а начале выполнения итерации полагают $\alpha_k = 1$, после чего проверяют условие:

$$J(u^{k+1}) < J(u^k). \tag{5}$$

Если это условие нарушается, то α_k уменьшают в 2 раза (до тех пор, пока неравенство (5) не будет выполнено) и переходят к следующей итерации (4) [19].

Теорема 3. Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ и выпукла, $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ с константой $L > 0$, $D = \mathrm{diam}\mathbf{U}$. Тогда

$$J(u_k) - J_* \leq \frac{J(u_0) - J_*}{1 + \frac{J(u_0)-J_*}{2LD}k} = O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{6}$$

В четвертой главе "Необходимые условия для модели Рамсея с неограниченным горизонтом управления" описана постановка задачи, сформулированы и доказаны необходимые условия экстремума и построен численный алгоритм решения поставленной задачи. Для реализации метода условного градиента и нахождения векторов оптимального управления, оптимальной траектории и оптимального критерия качества составлена программа на языке программирования Java. Результат работы программы приведен в виде таблиц и графиков.

Рассматривается модель Рамсея экономического роста предприятия замкнутого типа. Предположим, что $K(t)$ — капитал предприятия, $L(t)$ — трудовые резервы. Пусть в качестве управления $u(t)$ указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала. Таким образом, имеем следующую модель:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad K(0) = K_0, \tag{7}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = L_0, \tag{8}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], \qquad t \in [0, \infty), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} J(u,T) = \int_0^T e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln\ F(K(t), L(t))]dt + \\ + e^{-\rho T}\ln F(K(T), L(T)) \longrightarrow \max_{u,T}, \quad T \in [0, \infty), \end{gathered} \tag{10}$$

где $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция; $U \subset R^1$ — ограниченное выпуклое множество; $F(K, L)$ — функция производства, удовлетворяющая неоклассическим условиям; $K_0 > 0$ и $L_0 > 0$ — заданные начальные состояния системы; $\mu = const, \ \ \mu > 0$ — заданный коэффициент потери трудовых ресурсов;

$\rho > 0$ — коэффициент дисконтирования; $\varepsilon > 0$ — определяет часть капитала, которое необходимо потратить предприятию на развитие производства. Вид функционала (10) определяется тем обстоятельством, что в экономических задачах оптимальный процесс должен максимизировать не только суммарную текущую полезность (интегральный член в функционале (10)), но и всю последующую полезность (терминальный член в функционале (10)).

Также рассматриваются ограничение на фондовооруженность предприятия в фиксированные моменты времени:

$$\frac{K(t_j)}{L(t_j)} \geq c_j, \quad t_j \in [0, \infty), \quad j = \overline{1, q}. \tag{11}$$

Введем вспомогательную переменную $x(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$. При данной замене задача (7)-(10) сводится к следующей:

$$\dot{x}(t) = u(t) f(x(t)) - \mu x(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{12}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon, \tag{13}$$

$$x(t_j) \geq c_j, \qquad j = \overline{1, q}, \tag{14}$$

$$J_0(x, u, T) = \int_0^T f_0(x, u, t) dt + e^{-\rho T} \ln f(x(T)) \longrightarrow \max_{x,u,T}, \quad T \in [0, \infty), \tag{15}$$

где $f_0(x, u, T) = e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))], \quad f(x) = \frac{1}{L(t)} F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right)$.

Обозначим: $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{T})$ — оптимальное решение задачи (12)-(14).

Теорема 4. Пусть $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{T})$ — оптимальное решение задачи (12)-(14). Тогда существуют интегрируемые функции $\psi_j(t) \in R^n,\ j = \overline{0, q}$, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\max_{u \in V} \min_{j \in M_0} \int_0^{\hat{T}} \psi_j [f_0(\hat{x}, u, t) - f_0(\hat{x}, \hat{u}, t)] dt = 0,$$

где

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \bar{\psi}_j(t), & t \in [0, t_j], \\ 0, & t \in (t_j, \hat{T}]; \end{cases}$$

$$M_0 = M \cup \{0\}, \quad M = \{j \quad | \quad \hat{x}(t_j) = c_j, \quad j = \overline{1, q}\};$$

$$\dot{\bar{\psi}}_j(t) = -\bar{\psi}_j(t)(\hat{u}(t)f'(\hat{x}(t)) - \mu), \qquad \bar{\psi}_j(t_j) = 1, \quad t \in [0, \hat{T}];$$

$$\dot{\psi}_0(t) + \psi_0(\hat{u}(t)f'(\hat{x}(t)) - \mu) + \frac{e^{-\rho t}}{f(\hat{x}(t))}f'(\hat{x}(t)) = 0, \quad \psi_0(\hat{T}) = e^{-\rho T}\frac{f'(\hat{x}(\hat{T}))}{f(\hat{x}(\hat{T}))};$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t)f(\hat{x}(t)) - \mu\hat{x}(t), \qquad \hat{x}(t) = x_0, \quad t \in [0, \hat{T}].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании магистерской работы был рассмотрен и изучен ряд вопросов, касающихся задачи экономического роста и теории оптимального управления в целом.

Исследовалась модель Рамсея экономического роста предприятия односекторной экономики с бесконечным горизонтом управления, имеющая ограничения на фондовооруженность. Для данной модели были получены и доказаны необходимые условия оптимальности управления путем применения метода Дубовицкого-Милютина. Помимо этого, изучен принцип максимума Понтрягина.

Также введено понятие производственной функции и описаны ее свойства. В качестве производственной функции в рассматриваемой модели Рамсея выступала классическая функция Кобба-Дугласа.

Кроме того, был рассмотрен метод условного градиента, составлен алгоритм численного решения поставленной задачи и разработана программа, вычисляющая оптимальное решение в одной задаче экономического роста данным методом. Проведен численный эксперимент, результаты которого были представлены в виде таблиц и графиков.

Таким образом, поставленные цели работы можно считать достигнутыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Асеев, С.М. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста / С.М. Асеев, А.В. Кряжимский. Тр. МИАН. Т. 257. — М.: Наука, 2007.

2 Асеев, С.М. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике / С.М. Асеев, А.В. Кряжимский, К.О. Бесов. УМН. Т. 67:2, 2012.

3 Аббасов, М.Э. Методы оптимизации: учеб. пособие / М.Э. Аббасов. — СПб: Издательство "ВВМ", 2014.

4 Аттетков А.В.. Методы оптимизации: учеб. для вузов. — 2-е изд., стереотип. / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

5 Болдырев, В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления / В.И. Болдырев. // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления», № 1, 2004.

6 Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. — М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002.

7 Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск 9. Математика, информатика / Ред. колл.: А.С. Булдаев, С.Н. Васильев и др. — Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2012.

8 Мицель, А.А. Методы оптимизации. Часть 1: учебное пособие / А.А. Мицель, А.А. Шелестов. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002.

9 Потапов, М.М. Методы оптимизации. Конспект лекций / М.М. Потапов, М.Л. Буряков. — Москва: Изд-во Московского Государственного университета, 2003.

10 Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации: учебное пособие. — 2-е изд. / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

11 Голышкин, Н.И. Необходимые условия оптимальности управления в задаче экономического роста предприятия односекторной экономики с бесконечным горизонтом управления / Н.И. Голышкин, В.Р. Шебалдин. // Эко-

номика и управление: проблемы, тенденции, перспективы. Сб. науч. статей студентов, магистров и аспирантов. Вып. 5 / Под ред. доц. О.Ю. Челноковой (отв. ред.), доц. М.В. Голубниченко. — Саратов: Издательский центр «Наука», 2016.

12 Голышкин, Н.И. О необходимых условиях оптимальности управления в одной задаче экономического роста предприятия односекторной экономики с бесконечным горизонтом управления / Н.И. Голышкин, В.Р. Шебалдин. // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: материалы V Междунар. молодежной научн.-практ. конф. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2016.

13 Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — Перевод с английского / М. Интрилигатор. — Москва: Издательство «Прогресс», 1975.

14 Гераськин, М.И. Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора: учеб. пособие / М.И. Гераськин. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008.

15 Казакова, М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова. — Москва, 2013.

16 Усова, А.А. Влияние параметров производственных функций на равновесное решение и функцию цены задачи оптимального управления / А.А. Усова, А.М. Тарасьев. // Журнал «Математическая Теория Игр и ее Приложения». Т.3, в.3, 2011.

17 Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов / В.А. Колемаев. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

18 Потапов, М.М. Методы оптимизации. Конспект лекций / М.М. Потапов, М.Л. Буряков. — Москва: Изд-во Московского Государственного университета, 2003.

19 Мицель, А.А. Методы оптимизации. Часть 1: учебное пособие / А.А. Мицель, А.А. Шелестов. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002.