Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РОСТА ПРЕДПРИЯТИЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Глаголева Алексея Игоревича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ________________ В. Р. Шебалдин

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н. ________________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления на конечном полуинтервале времени возникают при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Часто такие задачи связывают с исследованием процессов экономического роста. Этим обусловлено их название — задачи оптимального экономического роста. [1]

Максимизируемый функционал полезности в задачах оптимального экономического роста имеет специальный вид.

Он задается несобственным интегралом, содержащим экспоненциальный дисконтирующий множитель [2].

Целью данной работы является:

1. Изучение модели экономического роста предприятия односекторной экономики с ограниченным горизонтом управления.
2. Получение необходимых условий оптимальности управления в одной задаче экономического роста.
3. Численное решение поставленной задачи по сформулированному алгоритму [3-5].

Практическая значимость проделанной работы состоит в написании программы, считающей оптимальное управление, оптимальную траекторию, интегральный критерий качества в одной задаче экономического роста на ограниченном интервале времени с ограничением на фондовооруженность методом сформулированного алгоритма [6-7].

Основные результаты магистерской работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. Всероссийская студенческая научная конференция «Экономика и управление: проблемы, тенденции, перспективы» (Саратов, Апрель 2016) [31];
2. V Международная молодежная научно-практическая конференция «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании, и управлении рисками» (Саратов, Ноябрь 2016) [32].

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Магистерская работа состоит из введения, двух теоретических и одной практической главы, заключения, приложения и списка использованных источников.

В первой главе рассматривается постановка задачи экономического роста – неоклассическая модель, вводятся элементы теории оптимального управления (функционал и его оптимизация), исследование задач на экстремум, линейная система с фазовыми ограничениями, и наконец метод Дубовицкого-Милютина [8-10].

Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$ [3]. Следовательно,

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t)\big) \ \forall t \geq 0.$$

Функция F называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном множестве

$$G = \{(K, L) \in R^2 : K > 0, L > 0\}, \tag{1.2}$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим "неоклассическим" условиям для всех K > 0, L > 0:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0, \tag{1.4}$$

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\infty,\qquad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial\, F(K,L)}{\partial K}=0,\tag{1.5}$$

$$\lim_{L\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\infty,\qquad \lim_{L\to\infty}\frac{\partial\, F(K,L)}{\partial L}=0.\tag{1.6}$$

Также предполагается, что F положительно однородная [11-13], т.е.

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L)\qquad \forall\lambda>0,\quad K>0,\quad L>0.\tag{1.7}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=f_1(t,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_r),\\ \dfrac{dy_2}{dt}=f_2(t,y_2,\dots,y_n,u_1,\dots,u_r),\\ \qquad\qquad\dots\\ \dfrac{dy_n}{dt}=f_n(t,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_r).\end{cases}\tag{1.24}$$

Здесь в правых частях уравнений записаны функции $f_1, f_2,\dots, f_n$ от $n+r+1$ переменных, которые определяют закон изменения производных фазовых переменных $y_1,y_2,\dots,y_n$.

Для того, чтобы сформулировать задачу оптимального управления, необходимо задать условие, которое позволяет отличать друг от друга более и менее выгодные решения данной задачи. Для этой цели служит критерий оптимальности (критерий качества управления):

$$I(u)=\int_{t_0}^{T}f_0\big(t,y_1(t),\dots,y_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t)\big)dt,\tag{1.25}$$

где $f_0(t,y_1(t),\dots,y_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t))$ — фиксированная функция $n+r+1$ переменных.

Таким образом, задача оптимального управления для системы дифференциальных уравнений (1.24) заключается в максимизации интегрального функционала (1.25) на множестве всех допустимых управлений, переводящих систему (1.24) из заданного начального состояния в заданное конечное. С математической точки зрения эта задача является специального вида задачей оптимизации интегрального функционала на определенном множестве функционального пространства кусочно-непрерывных управляющих функций. Решением этой задачи является управление (вектор-функция) $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_r^*(t))$, которое называют оптимальным управлением. Этому управлению однозначно соответствует определенная траектория $y^*(t) = \left(y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_n^*(t)\right)$, называемая оптимальной траекторией. При этом пару векторных функций $\left(y^*(t), u^*(t)\right)$ называют оптимальным процессом [14-18].

Во второй главе рассматривается задача оптимального управления с дифференцируемыми фазовыми ограничениями в конечном числе точек, с терминальным функционалом на конечном интервале времени, со свободным правым концом.

Доказываются необходимые условия оптимальности управления типа принципа максимума в форме максимальной задачи с использованием теоремы Дубовицкого-Милютина. Для этой цели строится конус допустимых вариаций, соответствующий фазовым ограничениям, конус запрещенных вариаций, а также другие конуса.

Теорема 30. Пусть $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ -оптимальная пара задачи (2.14) - (2.17). Тогда

существуют дифференцируемые функции $\psi_j(t),\ j = \overline{0, q}$, удовлетворяющие следующим уравнениям $\max\limits_{u(t)\in V_\varepsilon} \min\limits_{j\in M_0} \int\limits_0^T \Delta_u H_j(t,u)dt = 0,$

$$\dot{x}(t) = \hat{u}(t) f(\hat{x}(t)) - \mu \hat{x}(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0,T],$$

$$\dot{\psi}_0(t) + \psi_0(t)(\hat{u}(t) f'(\hat{x}(t)) - \mu) + \frac{e^{-\rho t}}{f(\hat{x}(t))} f(\hat{x}(t)) = 0, \quad \psi_0(T) = 0,\ t \in [0,T],$$

$$M_0 = M \cup \{0\},\ M = \{ j \mid \hat{x}(t_j) = c_j \},\ j = \overline{1,q},$$

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_j(t), & t \in [0,t_j] \\ 0, & t \in [t_j,T],\quad j = \overline{1,q} \end{cases} \qquad (2.18)$$

$$\dot{\Psi}_0 = -\hat{\Psi}_0(\hat{u}f'(\hat{x}) - \mu) + \frac{e^{-\rho t} f'(\hat{x})}{f(\hat{x})};\ \ \Psi^0(\hat{T}) = 0; t \in [0,\hat{T}]$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_j(t) = -\tilde{\psi}_j(\hat{u} f'(\hat{x}(t)) - \mu), \quad \tilde{\psi}_j(t_j) = 1,\ t \in [0,t_j]$$

$$\Delta_u H_j(t) = \psi_j(t) f(\hat{x}(t))(u(t) - \hat{u}(t)), \quad j = \overline{1.q},$$

$$\Delta_u H_0(t) = \psi_0[f_0(\hat{x}(t), u(t)) - f_0(\hat{x},\hat{u})],$$

В третьей главе будет построен алгоритм численного решения, использующий полученные уравнения для построения последовательности управлений и его обоснование а также сходимость [19]. Результаты теоремы служат основой для построения численного алгоритма решения задачи (2.14) - (2.17).

Алгоритм.

Шаг 1. $M_o^k = \{0\} \cup M^k;\ M^k = \{ j \mid c_j \le x^k(t_j) \le c_j + \varepsilon^k \}$ [20]

Шаг 2. $\{\Psi_j^k\};\ j \in M_o^k$:

$$\dot{\Psi}_0^k = -\Psi_0^k(u^k f'(x^k) - \mu) + \frac{e^{-\rho t} f'(x^k)}{f(x^k)}, \qquad \Psi_0(T) = 0$$

$$\dot{\tilde{\Psi}}_j^k = -\tilde{\Psi}_j^k\left(u f'(x^k) - \mu\right), \qquad \Psi_j(t_j) = 1$$

$$\Psi_j^k(t) = \begin{cases} \widetilde{\Psi}^k, & t \in [0, t] \\ 0, & t \notin [0, t] \end{cases} \ [21]$$

Шаг 3.

$$\max_{v \in V} \min_{j \in M_0^k} \int_0^1 \Delta_u H_j^k\,(t) dt = \mu^k, \qquad (3.1)$$

где $\Delta_u H_0^k(t) = \Psi_0[f_0(x^k, u, t)) - f_0(x^k, u^k, t)]$

Очевидно, что $\mu^k \geq 0$, а $\Delta_u H_j^k(t) = \Psi_j^k\left(f(\hat{x}^k)(u - u^k)\right)$, и

Обозначим $v^k(t)$ –функция, при которой достигается максимум,

Введем обозначение:

$$\theta_j^k = \int_0^1 \Delta_u H_j^k\, dt$$

Очевидно, что $0 \leq \mu^k \leq \theta_j^k$ [22-24]

Шаг 4. Для каждого $\alpha \in (0,1]$ найдем $N(\alpha, \varepsilon^k) = N^k(\alpha)$, такое, что выполняется неравенство:

$$\int\limits_{T^k(\alpha)} \Delta_u H(t) dt \leq \alpha\left(\theta_j^k - \vartheta\varepsilon^k\right), \text{где параметр } \vartheta \in (0,1)$$

Где $T^k(\alpha) = T(N^k(\alpha), \alpha), \gamma = const, \gamma \in (0,1)$ – некоторый параметр, необходимый для обоснования алгоритма [25-29]. Существование таких $N^k(\alpha)$ возможно согласно лемме 2.1 из [3].

Шаг 5. Определим для каждого $\alpha \in (0,1]$ функцию

$$u^k(t, \alpha) = \begin{cases} v^k, & t \in T^k(\alpha) \\ u^k, & t \notin T^k(\alpha) \end{cases} \ [30\text{-}32]$$

Шаг 6. Выберем α^kиз условия

$$J_0\left(u^k(t, \alpha^k)\right) \geq J_0(u^k) \ [33\text{-}35]$$

Шаг 7. В случае, если $\mu^k \leq \varepsilon^k$,то положим

$$\varepsilon^{k+1} = \beta\varepsilon^k, \qquad \beta \in (0,1), \qquad \text{и } u^{k+1} = u^k.$$

Если $\mu > \varepsilon$, то

$$\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k, \qquad \text{и } u^{k+1} = u^k(t, \alpha^k).$$

Заметим, что задача (3.1) эквивалентна следующей:

$$\sigma \longrightarrow \max$$

$$\int_0^1 \Delta_u H_j^k(t)dt \geq \sigma$$

$$0 \leq v(t) \leq 1 - \varepsilon$$

Было приведено обоснование данного алгоритма.

Пусть $x^k(t,\alpha) = x\left(t, u^k(t,\alpha)\right)$, $x^k(t) = x(t, u^k)$, тогда

$\delta u^k(t,\alpha) = u^k(t,\alpha) - u^k(t), \qquad \delta x^k(t,\alpha) = x^k(t,\alpha) - x^k(t)$

Лемма 32. Пусть $x^k, u^k, \alpha^k, \mu^k -$ определены согласно алгоритма

Тогда

$$\exists \bar{\alpha}^k \in (0,1] \forall \alpha \in (0, \bar{\alpha}^k], \quad \text{где}$$

$$\bar{\alpha}^k \leq \min\left\{\frac{\varepsilon^k}{c_1}, \frac{\mu^k - \vartheta\varepsilon^k}{c_0}\right\}, \text{что выполняется}$$

$$x^k\left(t_j, \alpha\right) \geq c_j,$$

$$J\left(u^k(t,\alpha), x^k(t,\alpha)\right) \geq J(x^k, u^k)$$

А также теорема о сходимости [36-37]

Теорема 33. Пусть $\alpha^k = \hat{\beta}^{S_k}$, где $\hat{\beta}^{S_k} = (\frac{1}{2})^{S_k}$, пусть $x^k, u^l, \alpha^l, \mu^l, \tilde{\beta}^{S_k} -$ определены согласно алгоритма

$$x\left(t_j, \tilde{\beta}^{S_k}\right) \geq c_j,$$

$$J\left(x^k(t,\alpha), u^k(t,\alpha)\right) - J(x^k, u^k) \geq \frac{1}{2}\tilde{\beta}^{S_k}(\mu^k - \vartheta\varepsilon^k), \text{тогда}$$

$$\underline{\lim}\, \varepsilon^k = 0, \qquad \underline{\lim}\, \mu^k = 0$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании магистерской работы были рассмотрены и изучены ряд вопросов, теорем и лемм, касающихся задачи экономического роста и теории оптимального управления.

В результате проделанной работы была рассмотрена и изучена модель Рамсея экономического роста предприятия односекторной экономики. Также введено определение задачи оптимального управления и исследованы задачи на экстремум при наличии ограничений. Затем были получены необходимые условия оптимальности управления в одной задаче экономического роста путем применения метода Дубовицкого-Милютина. Конечным результатом работы стало построение алгоритма численного решения задачи оптимального роста предприятия односекторной экономики и доказано его обоснование, сходимость. По результатам работы численного алгоритма была составлена задача в среде java с графическим интерфейсом.

Таким образом, поставленные цели работы можно считать достигнутыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Ногин, В.Д. Введение в оптимальное управление: учебно-методическое пособие / В.Д. Ногин. СПб: «ЮТАС», 2008.

2 Асеев, С.М. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста / С.М. Асеев, А.В. Кряжимский. Тр. МИАН. Т. 257. М.: Наука, 2007.

3 Шебалдин, В.Р. Об одной задаче оптимального управления с ограничениями / В.Р. Шебалдин. Саратов, 1996. Деп. в ВИНИТИ 30.03.96, ќ 3074-В96.

4 Асеев, С.М. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике / С.М. Асеев, А.В. Кряжимский, К.О. Бесов. УМН. Т. 67:2, 2012.

5 Дубовицкий, А.Я. Задачи на экстремум при наличии ограничений / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. // ЖВМ и МФ. Т. 5, ќ 3, 1965.

6 Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. М.: Наука, 1974.

7 Шебалдин, В.Р. О минимизирующих последовательностях в задаче оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями / В.Р. Шебалдин. Деп.: ВИНИТИ, 1996. С. 14.

8 Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко М.: «Наука», 1983.

9 Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов / В.А. Колемаев. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

10 Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления /

В.Г. Болтянский. М.: «Наука», 1969.

11 Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: учебное пособие / Б.А. Лагоша. М.: МГУЭСИ, 2004.

12 Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. Мн.: ТетраСистемс, 2002.

13 Моисеев, В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография / В.С. Моисеев. Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования», 2013.

14 Кузнецов, Ю.А. Применение систем компьютерной математики в задачах оптимального управления экономическими системами: учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Применение программных средств в научных исследованиях и в преподавании математики и механики» / Ю.А. Кузнецов, А.В. Семенов. Нижний Новгород, 2007.

15 Сотсков, А.И. Оптимальное управление в примерах и задачах / А.И. Сотсков, Г.В. Колесник. М.: Российская экономическая школа, 2002.

16 Пантелеев, А.В. Теория управления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. М.: Высш. шк., 2003.

17 Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: учеб. пособие для вузов / Ф.П. Васильев. М.: Наука, 1988.

18 Грачев, Н.И. Библиотека программ для решения задач оптимального управления / Н.И. Грачев, Ю.Г. Евтушенко. // ЖВМ и МФ. Т. 19, ќ 2, 1979.

19 Мижидон, А.Д. Численные методы оптимизации: учебное пособие / А.Д.

Мижидон. Улан-Удэ: ВСГТУ, 2011.

20 Моисеев, Н.Н. Численные в теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. Москва: «Наука», 1971.

21 Срочко, В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В.А. Срочко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

22 Воронцовский, А.В. Исторические аспекты моделирования экономического роста / А.В. Воронцовский. // Журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 5. Экономика», ќ 2, 2006.

23 Аббасов, М.Э. Методы оптимизации: учеб. пособие / М.Э. Аббасов. СПб: Издательство "ВВМ 2014.

24 Аттетков А.В.. Методы оптимизации: учеб. для вузов. 2-е изд., стереотип. / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

25 Болдырев, В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления / В.И. Болдырев. // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления», ќ 1, 2004.

26 Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002.

27 Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск 9. Математика, информатика / Ред. колл.: А.С. Булдаев, С.Н. Васильев и др. Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2012.

28 Мицель, А.А. Методы оптимизации. Часть 1: учебное пособие / А.А. Мицель, А.А. Шелестов. Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002.

29 Потапов, М.М. Методы оптимизации. Конспект лекций / М.М. Потапов, М.Л. Буряков. Москва: Изд-во Московского Государственного университета, 2003.

30 Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации: учебное пособие. 2-е изд. / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

31 Глаголев, А.И. Численные решения задачи оптимального роста предприятия односекторной экономики / А.И. Глаголев, В.Р. Шебалдин. //Экономика и управление: проблемы, тенденции, перспективы. Сб. науч. статей студентов, магистров и аспирантов. Вып. 5 / Под ред. доц. О.Ю. Челноковой (отв. ред.), доц. М.В. Голубниченко. Саратов: Издательский центр «Наука», 2016.

32 Глаголев, А.И. Численные решения задачи оптимального роста предприятия односекторной экономики / А.И. Глаголев, В.Р. Шебалдин. // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: материалы V Междунар. молодежной научн.-практ. конф. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2016.

33 Гераськин, М.И. Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора: учеб. пособие / М.И. Гераськин. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008.

34 Казакова, М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова. Москва, 2013.

35 Усова, А.А. Влияние параметров производственных функций на равновесное решение и функцию цены задачи оптимального управления / А.А. Усова, А.М. Тарасьев. // Журнал «Математическая Теория Игр и ее Приложения». Т.3, в.3, 2011.

36 Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Перевод с английского / М. Интрилигатор. Москва: Издательство «Прогресс», 1975.

37 Шебалдин, В.Р. Об одной задаче оптимального управления с ограничениями / В.Р. Шебалдин. Саратов, 1996. Деп. в ВИНИТИ 30.03.96, ќ 3074-В96.