

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**Сравнение уточненных теорий изгиба пластин при описании изгибных
краевых колебаний прямоугольной пластины**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Ротарь Алексея Владимировича

Научный руководитель
проф. каф. МТУиБМ, д.ф.-м.н.


подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., профессор


подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2017

Введение

Актуальность темы. Пластинки находят широкое применение в технике; в качестве типичных примеров можно указать на бетонные и железобетонные плиты, применяемые в строительных конструкциях, для обшивки корпуса корабля. Большое значение имеет расчет собственных частот колебаний пластин, позволяющий избежать явления резонанса [1].

Целью данной работы является изучение пределов применимости различных приближенных теорий изгиба пластин при описании колебаний, характеризующихся локализацией амплитуды прогиба у края пластины.

Материалы и методы исследования. В работе рассматривается собственные гармонические колебания шарнирно опертой прямоугольной пластины рисунок 1. Края пластины $y=\pm b$ шарнирно оперты, а другие два края свободны от закрепления.

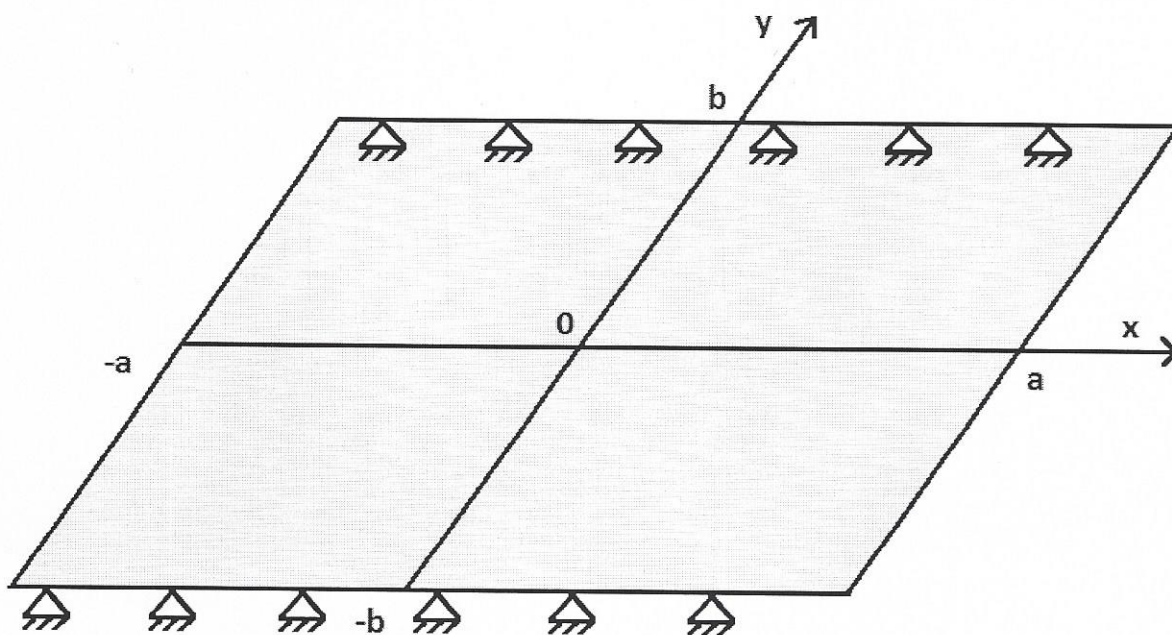


Рисунок 1—шарнирно опертая пластина.

Для описания колебаний пластины применяются четыре различные теории:

- 1) классическая теория Кирхгофа;
- 2) уточненная теория с приведенной инерцией с классическими граничными условиями;
- 3) уточненная теория с приведенной инерцией с модифицированными граничными условиями;
- 4) теория Тимошенко.

Научная значимость работы состоит в определении пределов применимости различных теорий изгиба пластин при описании краевых колебаний, а также в изучении возможности уточнения решения для краевых колебаний по теории с приведенной инерцией путем введения модифицированных условий свободного края.

Структура и объем работы бакалаврская работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 44 листах машинного текста и содержит 10 рисунков.

Основное содержание работы

Во введении описывается важность выбора теории для расчета собственной частоты колебаний пластин, излагаются и описываются основные методы нахождения собственных частот, используемые в наше время.

В первом разделе поставленная задача решается по классической теории Кирхгофа [2]. Основное дифференциальное уравнение этой теории имеет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{2\rho h \omega^2 W}{D} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия, выраженные через функцию прогиба, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} y = \pm b : W = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0; \\ x = \pm a : \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$W(x, y, t) = w(x) \cos(\alpha_n y) e^{i\omega t},$$

где

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2b} \pi, n = 1, 2, \dots$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{\alpha}_n = \alpha_n b,$$

в дальнейшем черту сверху опустим.

Решением уравнения (1) будет

$$W(x, y) = [C_1 \operatorname{ch}(\beta_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(\beta_2 x)] \cos(\alpha_n y), \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = \sqrt{\alpha_n^2 - q_n}; \\ \beta_2 = \sqrt{\alpha_n^2 + q_n}, \end{cases}$$

а частотный параметр

$$q_n^2 = \frac{2\rho h b^4 \omega^2}{D}.$$

Подставляя (3) в граничные условия (2), получим систему

$$\begin{cases} C_1 ch(l\beta_1)(\beta_1^2 - \nu\alpha_n^2) + C_2 ch(l\beta_2)(\beta_2^2 - \nu\alpha_n^2) = 0; \\ C_1\beta_1 sh(l\beta_1)(\beta_1^2 + (2-\nu)\alpha_n^2) + C_2\beta_2 sh(l\beta_2)(\beta_2^2 + (2-\nu)\alpha_n^2) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Приравнивая определитель системы (4) нулю, получим частотное уравнение

$$P_1^2 ch(l\beta_1)\beta_2 sh(l\beta_2) - P_2^2 \beta_1 sh(l\beta_1)ch(l\beta_2) = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{cases} P_1 = q_n - \alpha_n^2(1-\nu); \\ P_2 = q_n + \alpha_n^2(1-\nu). \end{cases}$$

Во втором разделе рассматривается рашение задачи по уточненной теории с приведенной инерцией [2]. Уравнение изгибных колебаний пластины в этой теории имеет вид

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) + 2\rho h^3 d_0 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^2 \partial t^2}\right) + 2\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

а граничные условия остаются от классической теории и имеют вид (2).

В этом случае решением уравнения (6) будет

$$W(x, y) = [C_1 ch(\beta_1 x) + C_2 ch(\beta_2 x)] \cos(\alpha_n y) e^{i\omega t} \quad (7)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = \sqrt{\frac{2\alpha_n^2 - q_n^2 \eta^2 d_0 + \sqrt{q_n^4 \eta^4 d_0^2 + 4q_n^2}}{2}}; \\ \beta_2 = \sqrt{\frac{2\alpha_n^2 - q_n^2 \eta^2 d_0 - \sqrt{q_n^4 \eta^4 d_0^2 + 4q_n^2}}{2}}, \end{cases}$$

а

$$\eta = \frac{h}{b}.$$

Подставим (7) в граничные условия (2) и получим систему

$$\begin{cases} C_1 ch(l\beta_1)(\beta_1^2 - \nu\alpha_n^2) + C_2 ch(l\beta_2)(\beta_2^2 - \nu\alpha_n^2) = 0; \\ C_1 \beta_1 sh(l\beta_1)(\beta_1^2 + (2-\nu)\alpha_n^2) + C_2 \beta_2 sh(l\beta_2)(\beta_2^2 + (2-\nu)\alpha_n^2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для системы (8) запишем частотное уравнение

$$\begin{aligned} ch(l\beta_1)(\beta_1^2 - \nu\alpha_n^2) * \beta_2 sh(l\beta_2)(\beta_2^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) - \\ \beta_1 sh(l\beta_1)(\beta_1^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) * ch(l\beta_2)(\beta_2^2 - \nu\alpha_n^2) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В третьем разделе ищем решение задачи по уточненной теории с модифицированными граничными условиями.

Для того же дифференциального уравнения (6) в [2] предлагается использовать модифицированные граничные условия:

$$\begin{aligned} y = \pm b : W = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0; \\ x = a : \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 3Bh \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом новых граничных условий (10) частотное уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} (ch(l\beta_1)(\beta_1^2 - \nu\alpha_n^2) + 3(1-\nu)Bh\alpha_n^2 \beta_1 sh(l\beta_1)) \beta_2 sh(l\beta_2)(\beta_2^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) - \\ - (ch(l\beta_2)(\beta_2^2 - \nu\alpha_n^2) + 3(1-\nu)Bh\alpha_n^2 \beta_2 sh(l\beta_2)) \beta_1 sh(l\beta_1)(\beta_1^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В четвертом разделе рассматривается решение задачи по теории типа Тимошенко [4]. В нашем случае уравнение поперечных колебаний имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \left(\frac{\rho}{k^2 G} + \rho I \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 I}{k^2 G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия свободного края записываются в виде

$$\begin{cases} D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) = 0; \\ \frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) = 0; \\ 2k^2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1\right) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где ψ_1 и ψ_2 — углы поворота нормали.

Величины ψ_1 и ψ_2 определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \Phi; \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \Psi, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\Phi = \frac{\rho}{k^2G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w,$$

а Ψ определяется из уравнения

$$D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) - 4k^2Hh\Psi - 2\rho I \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0.$$

Решение для w ищем в виде

$$W(x, y) = w(x) \cos(\alpha_n y). \quad (15)$$

Решение уравнения (12) будет иметь вид

$$W(x, y) = [C_1 \operatorname{ch}(\beta_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(\beta_2 x)] \cos(\alpha_n y), \quad (16)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = \sqrt{\frac{\frac{q_n^2 \eta^2 (2 + k^2 (1 - \nu))}{3k^2 (1 - \nu)} + \sqrt{\frac{q_n^4 \eta^4 (2 + k^2 (1 - \nu))^2}{9k^4 (1 - \nu)^2} - \frac{8q_n^4 \eta^4}{9k^2 (1 - \nu)} - 4q_n^2}}{2}}; \\ \beta_2 = \sqrt{\frac{\frac{q_n^2 \eta^2 (2 + k^2 (1 - \nu))}{3k^2 (1 - \nu)} - \sqrt{\frac{q_n^4 \eta^4 (2 + k^2 (1 - \nu))^2}{9k^4 (1 - \nu)^2} - \frac{8q_n^4 \eta^4}{9k^2 (1 - \nu)} - 4q_n^2}}{2}}. \end{cases}$$

Для ψ_1 и ψ_2 ищем решение в виде:

$$\psi_1(x, y, t) = \psi_1(x) \cos(\alpha_n y) e^{i\omega t};$$

$$\psi_1(x, y, t) = \psi_2(x) \sin(\alpha_n y) e^{i\omega t}.$$

Выражения для углов поворота будут иметь вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{b} \cos(\alpha_n y) \left[\frac{C_1 S_1 \beta_1}{\beta_1^2 - \alpha_n^2} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + \frac{C_2 S_2 \beta_2}{\beta_2^2 - \alpha_n^2} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + \frac{C_3 \alpha_n}{\lambda^2 - \alpha_n^2} \operatorname{sh}(\lambda x) \right]; \\ \psi_2 &= \frac{1}{b} \sin(\alpha_n y) \left[\frac{C_1 S_1 \alpha_n}{\beta_1^2 - \alpha_n^2} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \frac{C_2 S_2 \alpha_n}{\beta_2^2 - \alpha_n^2} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \frac{C_3 \lambda}{\lambda^2 - \alpha_n^2} \operatorname{ch}(\lambda x) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{2q_n^2 \eta^2}{3k^2(1-\nu)} - \beta_1^2 + \alpha_n^2; \\ S_2 &= -\frac{2q_n^2 \eta^2}{3k^2(1-\nu)} - \beta_2^2 + \alpha_n^2. \end{aligned}$$

Подставим (16) и (17) в граничные условия (13) получим систему

$$\begin{cases} \left[\frac{C_1 S_1 (\beta_1^2 - \nu \alpha_n^2)}{\beta_1^2 - \alpha_n^2} \operatorname{ch}(\beta_1 l) + \frac{C_2 S_2 (\beta_2^2 - \nu \alpha_n^2)}{\beta_2^2 - \alpha_n^2} \operatorname{ch}(\beta_2 l) + \frac{C_3 \alpha_n (\alpha_n - \nu \lambda)}{\lambda^2 - \alpha_n^2} \operatorname{ch}(\lambda l) \right] = 0; \\ \left[-\frac{2C_1 S_1 \beta_1 \alpha_n}{\beta_1^2 - \alpha_n^2} \operatorname{sh}(\beta_1 l) - \frac{2C_2 S_2 \beta_2 \alpha_n}{\beta_2^2 - \alpha_n^2} \operatorname{sh}(\beta_2 l) + C_3 \operatorname{sh}(\lambda l) \right] = 0; \\ \left[C_1 \beta_1 \operatorname{ch}(\beta_1 l) \left(1 - \frac{S_1}{(\beta_1^2 - \alpha_n^2)} \right) + C_2 \beta_2 \operatorname{ch}(\beta_2 l) \left(1 - \frac{S_2}{(\beta_2^2 - \alpha_n^2)} \right) + \frac{C_3 \alpha_n}{(\lambda^2 - \alpha_n^2)} \operatorname{sh}(\lambda l) \right] = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Приравнявая нулю определитель системы (18), получим частотное уравнение, соответствующее теории типа Тимошенко. Первый отличный от нуля корень этого уравнения соответствует краевым колебаниям.

В пятом разделе сравниваются значения частотных параметров, подчитанных по четырем теориям.

Сначала будем сравнивать все четыре теории, с трехмерной теорией взяв ее решение за эталонное [5]. Построим график изменения частоты с ростом относительной толщины η (рисунок 2). Можно заметить, что с ростом относительной толщины классическая теория теряет точность, однако уточненные теории с некоторой погрешностью совпадают с трехмерной теорией. На рисунке 3 представлен график отклонения абсолютных величин решений полученных по четырем теориям от трехмерной теории.

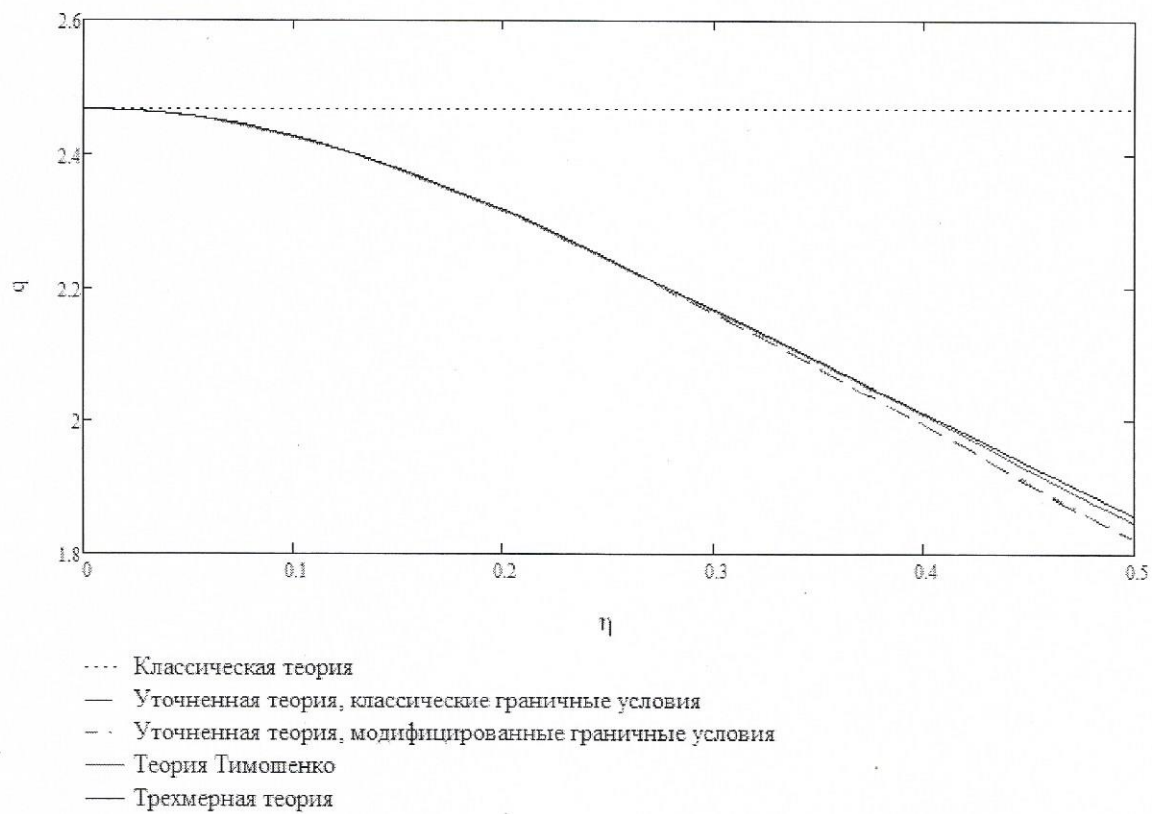


Рисунок 2 — Сравнение четырех теорий с точным решением.

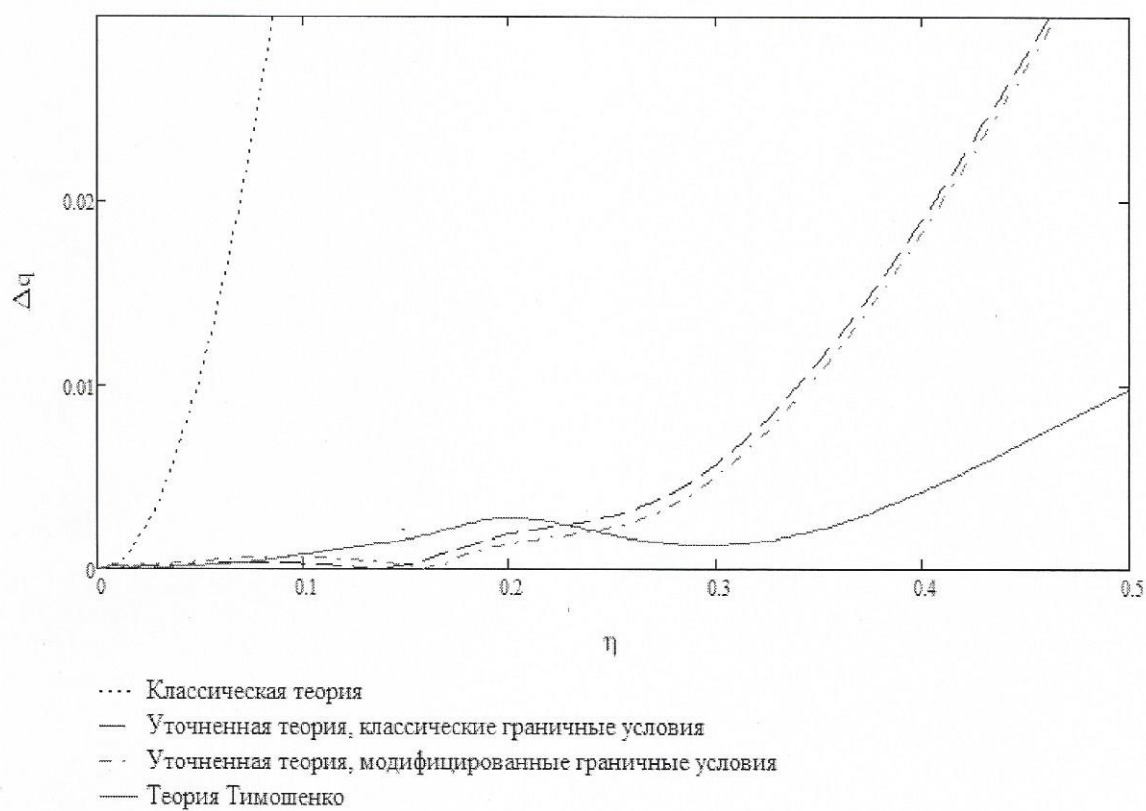


Рисунок 3 — График абсолютных величин отклонения от точной теории

По рисунку 3 можно вычислить погрешность каждой теории. При относительной толщине $\eta=0.075$ классическая теория имеет погрешность менее 1%, уточненная теория с классическими граничными условиями дает незначительную погрешность 0.016%, с модифицированными – 0.027%, теория типа Тимошенко позволяет получить решение с погрешностью 0.018%. При $\eta=0.4$ классическая теория неприменима, уточненная теория имеет погрешность около 1% для обоих вариантов граничных условий, погрешность теории типа Тимошенко – 0.2%.

Также в работе построены графики зависимости частотного параметра от длины прямоугольника и от параметра n . На рисунке 4 приведен график зависимости от n для толстой пластины.

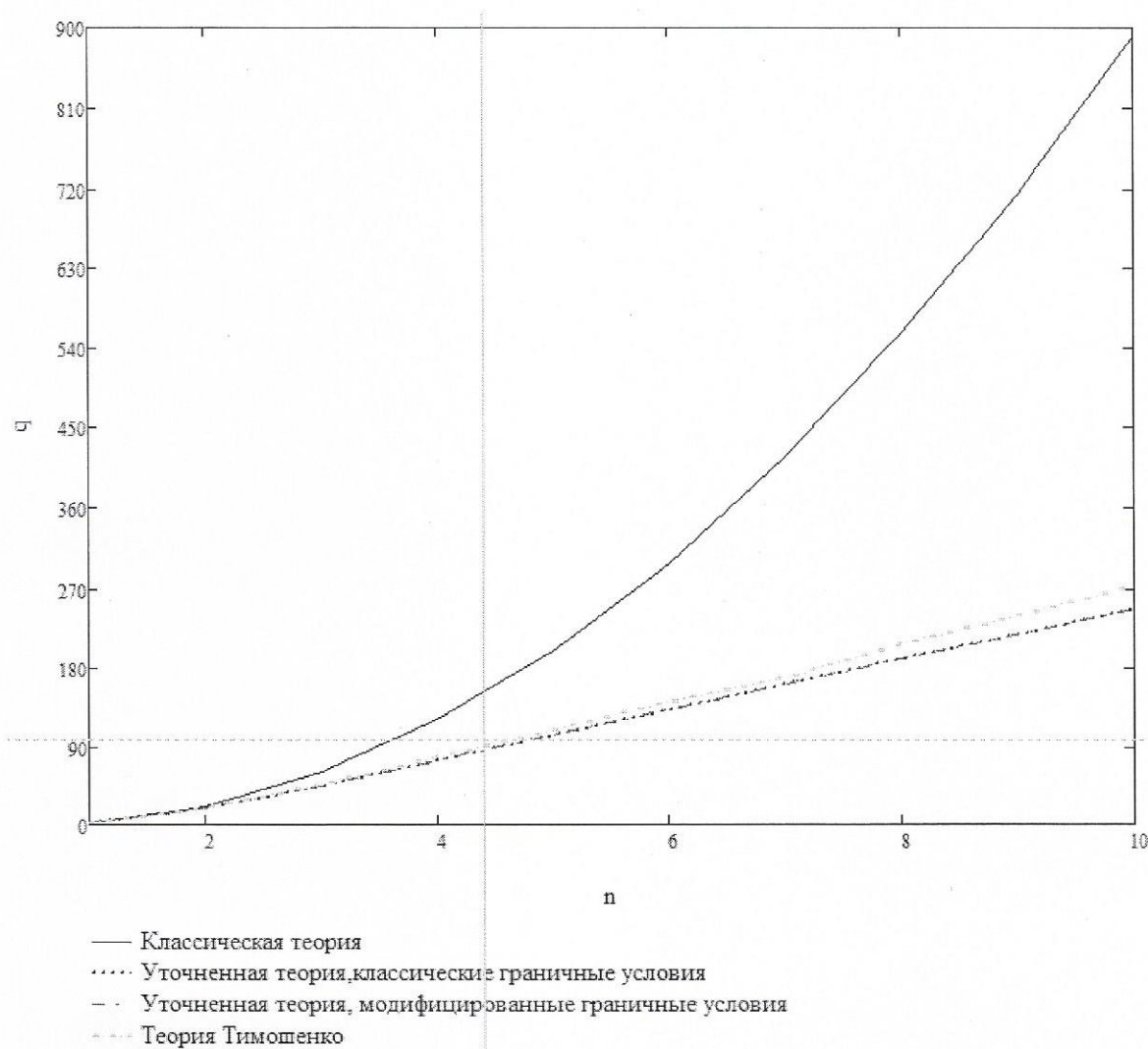


Рисунок 4 — Зависимость значения относительной частоты от n , при $l = 10$ и относительной толщине $\eta = 0.1$.

Заключение

В результате проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. В задачах о собственных колебаниях пластины следует выбирать приближенную теорию с учетом значения относительной толщины пластины, так как значения частотных параметров, вычисленные по классической теории Кирхгофа, могут отклоняться от истинных с ростом η .
2. При относительной толщине $\eta=0.075$ классическая теория имеет погрешность менее 1%, уточненная теория с классическими граничными условиями дает незначительную погрешность 0.016%, с модифицированными – 0.027%, теория типа Тимошенко позволяет получить решение с погрешностью 0.018%. При $\eta=0.4$ классическая теория неприменима, уточненная теория имеет погрешность около 1% для обоих вариантов граничных условий, погрешность теории типа Тимошенко – 0.2%.
3. При попытке модифицировать граничные условия для теории с приведенной инерцией возросла абсолютная величина отклонения частотного параметра от трехмерного решения. Следовательно, новые граничные условия не уточняют, а наоборот, отдаляют наше решение от трехмерной теории. Возможно, это обуславливается тем, что модифицированные граничные условия разрабатывались для статических задач, а не для задач о колебаниях пластины.
4. Для получения наиболее точного решения по теории типа Тимошенко требуется более сложные расчеты при том, что решение уточняется в 4 знаке после запятой. Используя приближенную теорию с приведенной инерцией, можно избежать громоздких выкладок, при этом получив довольно точное решение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гриченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гриченко, В.В. Мелешко. - Киев: Наук. думка, 1981. - 283с.
2. Kirchhoff, G.R. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe / G.R Kirchhoff // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1850. V. 1850. № 40. P. 51–88.
3. Kossovich, L.Yu. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies / J.D. Kaplunov, L.Yu. Kossovich, E.V. Nolde. - San Diego: Academic Press, 1998. - 226 p.
4. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. - М.: Физматгиз, 1963. - 635 с.
5. Вильде, М.В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. -280 с.

 16.06.17.