

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**Исследование погранслоя в окрестности квазифронта в вязкоупругих
тонкостенных оболочках**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета

Лунёвой Анастасии Дмитриевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент

25.05.2017 г. Аноф

дата, подпись

Н. С. Анофрикова

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Мед

дата, подпись

Л. Ю. Коссович

Саратов 2017

Введение

Исследование нестационарных процессов, связанных с распространением волн, является одной из важнейших задач для инженеров, занимающихся оболочечными конструкциями. Такие конструкции используются, например, в судостроении, машиностроении, ракетостроении и многих других областях техники. Элементы конструкций часто изготавливают из композиционных, полимерных материалов, поведение которых не является упругим. Для описания поведения таких материалов используют в том числе различные вязкоупругие модели.

Исследование нестационарных волновых процессов в вязкоупругих средах является весьма сложной проблемой. Это связано, главным образом, со сложностью математической постановки динамических задач теории вязкоупругости. Поэтому в области динамики вязкоупругих сред получено весьма ограниченное число частных результатов при решении простейших задач.

Сложность уравнений теории вязкоупругости, в частности для оболочек, не позволяет получить точные аналитические решения, и поэтому используются различные приближенные методы, основанные на приближении как исходных уравнений, так и решений.

Целью бакалаврской работы является построение и исследование решения для погранслоя в окрестности квазифронта в вязкоупругой тонкостенной оболочке вращения, подверженной ударному воздействию на ее торец с помощью аналитических методов.

Задачами выполняемой работы являются:

- 1) постановка трехмерной задачи о распространении нестационарных волн в тонкостенных вязкоупругих оболочках при ударном продольном воздействии тангенциального типа в предположении, что материал оболочки представлен моделью Максвелла;

- 2) изучение метода расчленения напряженно-деформированного состояния на составляющие с различными показателями изменчивости;
- 3) вывод уравнений для погранслоя в окрестности квазифронта для вязкоупругой оболочки вращения;
- 4) решение полученных уравнений с помощью метода интегрального преобразования Лапласа;
- 5) анализ полученного решения, сравнение его с имеющимися в литературе аналогами для упругих оболочек.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырёх разделов и заключения и содержит 46 страниц. Список использованных источников включает 22 наименования.

Раздел 1. Постановка задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругой оболочке.

Раздел 2. Расчленение напряжённо – деформированного состояния на составляющие с разными показателями изменчивости.

Раздел 3. Вывод уравнений погранслоя в окрестности квазифронта.

Раздел 4. Решение уравнений погранслоя с помощью интегрального преобразования Лапласа.

Практическая значимость работы состоит в расширении области применимости аналитических методов исследования нестационарного напряженно-деформированного состояния, разработанных для упругих тонкостенных оболочек на случай вязкоупругих оболочек.

Основное содержание работы

Бакалаврская работа посвящена построению и исследованию решения погранслоя в окрестности квазифронта в вязкоупругой тонкостенной оболочке вращения. Под квазифронтом понимается фронт продольной волны по двумерной теории [1].

Во введении проводится обзор работ, посвящённых исследованию поведения тонкостенных конструкций, подверженных ударному воздействию [2 – 6].

В первом разделе приводится постановка трёхмерной задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругой тонкостенной оболочке, подверженной ударному продольному воздействию тангенциального типа.

Выбрана соответствующая геометрии рассматриваемого тела криволинейная триортогональная система координат, связанная со срединной поверхностью оболочки [7]. Приведены трёхмерные уравнения движения и соответствующие выбранной модели трёхмерные уравнения состояния. Свойства материала оболочки описываются моделью Максвелла [8]. Уравнения состояния берутся в дифференциальной форме. Предполагается, что материал удовлетворяет условию упругого объёмного расширения.

Начально краевая задача дополняется граничными условиями, в соответствии с рассматриваемой нагрузкой: на торце задаются нормальные напряжения. Ударная нагрузка моделируется единичной функцией Хевисайда [9].

Предполагается, что внешние поверхности оболочки свободны, поэтому напряжения на них полагаются равными нулю.

Рассматривается случай, когда оболочка находится в состоянии покоя до момента приложения нагрузки, поэтому начальные условия также берутся нулевые.

Поскольку в трёхмерной постановке задача не имеет аналитического решения, то в качестве метода исследования выбран метод расчленения напряжённо-деформированного состояния на составляющие с различными показателями изменчивости, основанный на ведении малого параметра, равного отношению полутолщины оболочки к характерному значению радиуса кривизны срединной поверхности оболочки. Введение данного параметра позволяет с помощью метода асимптотического интегрирования вывести приближенные

уравнения, имеющие более простой вид по сравнению с исходными и описывающие решение исходной задачи в более узкой области в рамках некоторой заданной погрешности.

Второй раздел посвящён описанию разделения решения на составляющие с различными показателями изменяемости. В рассматриваемом случае схема расчленения напряжённо-деформированного состояния на составляющие с различными показателями изменяемости аналогична упругому случаю [10, 11].

Вся область делится на следующие составляющие:

- 1) погранслоем в окрестности фронта волны расширения;
- 2) квазиплоская квазисимметричная задача теории вязкоупругости;
- 3) погранслоем в окрестности квазифронта;
- 4) безмоментная составляющая;
- 5) наложение безмоментной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана.

Приведены значения для показателей изменяемости и динамичности для каждой из выделяемых областей.

В третьем разделе приводится вывод уравнений погранслоя в окрестности квазифронта на примере оболочки вращения. Рассматриваются трёхмерные уравнения вязкоупругости для оболочки произвольного очертания, приведённые в первом разделе. Данные уравнения записываются для оболочки вращения. Поскольку в рассматриваемом случае коэффициенты уравнений не зависят от окружной координаты, то производится разложение искомых функций в тригонометрические ряды по ней.

В полученные уравнения вводятся безразмерные характеристические переменные, связанные с той областью, в которой ищется решение, а также безразмерный параметр, характеризующий влияние вязкоупругого параметра на поведение решения. Описываются характерные для рассматриваемого случая значения показателей изменяемости и динамичности, а также интенсивность

времени релаксации, характеризующего влияние вязкоупругих параметров на характер решения. Выражение для асимптотик составляющих напряжённо-деформированного состояния берутся как в упругом случае.

После введения асимптотик для составляющих напряжённо-деформированного состояния в трёхмерные разрешающие уравнения, записанные в безразмерных переменных и разделения полученных уравнений на чётные и нечётные части относительно нормальной координаты, производится отбрасывание асимптотически малых членов уравнений в соответствии с выбранной точностью выводимых уравнений.

Интегрирование полученных уравнений по нормальной координате позволяет установить закон зависимости составляющих напряжённо-деформированного состояния от этой координаты и в дальнейшем перейти к двумерным уравнениям. Следует отметить, что для вывода уравнений погранслоя в окрестности квазифронта компоненты напряжённо-деформированного состояния v_1 и σ_{11} должны определяться с большей, чем остальные компоненты, точностью.

Подстановка найденных зависимостей в чётные и нечётные части разрешающих уравнений, позволяет установить связь между двумерными компонентами напряжённо-деформированного состояния, то есть компонентами, независимыми от нормальной координаты. Полученные уравнения в напряжениях и перемещениях и являются двумерными приближенными уравнениями, описывающие напряжено-деформированное состояние оболочки вращения в окрестности квазифронта.

Далее вводятся перемещения срединной поверхности оболочки и усилия. Приближённые двумерные уравнения для асимптотически главных компонент напряжённо-деформированного состояния записываются через введённые двумерные функции.

Установлено, что уравнение для продольного перемещения представляет собой уравнение в частных производных шестого порядка. Поскольку рассматривается погранслоя для волн, распространяющихся в направлении возрастания продольной координаты, то полученное уравнение с помощью интегрирования приводятся к уравнению третьего порядка.

Четвёртый раздел посвящён решению выведенных в третьем разделе уравнений погранслоя в окрестности квазифронта для случая осесимметричной нагрузки на торце цилиндрической оболочки. К упрощённым уравнениям для нормального продольного усилия и продольного перемещения добавляются соответствующие постановке задачи двумерные начальные и граничные условия.

Для решения поставленной начально-краевой задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по временной переменной [12]. Данный метод позволяет свести уравнение в частных производных третьего порядка для продольного перемещения срединной поверхности оболочки к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами относительно изображения перемещения. Подстановка найденного решения для изображения продольного перемещения в выражение для изображения нормального продольного усилия позволяет удовлетворить граничному условию в изображениях.

Для нахождения оригинала нормального продольного усилия используется формула Меллина [13]. В полученном в результате применения данной формулы выражении для усилия проводится замена переменной. Вследствие данной замены установлено, что оригинал усилия представляет собой сумму интеграла от функции Эйри первого рода [14] и некоторой функции, значение которой вычисляется с помощью метода контурного интегрирования [15]. Вид полученного решения позволяет сделать выводы о влиянии параметра вязкоупругости на поведение решения и установить отличие от решения

аналогичной задачи для случая упругой оболочки, полученного другими авторами [4].

Построены графики приведённых значений нормального продольного усилия для различных значений времён релаксации. Установлено влияние значения времени релаксации на поведение решения.

Заключение

В бакалаврской работе был исследован погранслоя в окрестности квазифронта в тонкостенной вязкоупругой оболочке, подверженной ударному продольному воздействию на её торец.

Произведена постановка трёхмерной задачи о распространении нестационарных волн в тонкостенной вязкоупругой оболочке при ударном продольном воздействии тангенциального типа на её торец в предположении, что материал оболочки представлен моделью Максвелла и удовлетворяет условию упругого объёмного расширения.

Изучен метод расчленения напряжённо-деформированного состояния на составляющие с различными показателями изменяемости на примере упругих тонкостенных оболочек. Данный метод обобщён на случай вязкоупругих оболочек.

С помощью метода асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений теории вязкоупругости выведены уравнения погранслоя в окрестности квазифронта для вязкоупругой оболочки вращения.

Полученные уравнения решены для случая цилиндрической оболочки в предположении, что прикладываемая нагрузка является симметричной относительно окружной координаты, с помощью метода интегрального преобразования Лапласа. Найдено решение для нормального продольного усилия.

Установлено, что полученное решение отличается от упругого аналога наличием экспоненциально затухающего множителя, определяющего затухание решения на квазифронте с ростом времени. Численные расчёты в виде графиков

приведённого значения нормального продольного усилия относительно продольной координаты при различных значениях времени подтверждают данный факт.

Графики зависимости приведённого значения нормального продольного усилия относительно продольной координаты, построенные при различных значениях времени релаксации и относительной полутолщины оболочки позволили сделать выводы о влиянии данных параметров на характер решения.

Список использованных источников

1. Петрашень, Г. И. Количественное изучение нестационарных интерференционных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. I. Постановки задач и рациональные методы их решения. [Электронный ресурс] / Г. И. Петрашень, Б. М. Каштан, Ю. В. Киселев // Общероссийский математический портал Math-Net.RU [Электронный ресурс] : [сайт] URL: <http://www.mathnet.ru/links/5d67f7371651e884bbeed3591552666a/zns15916.pdf>. (дата обращения: 10.03.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.
2. Кириллова, И. В. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В Кириллова, Л.Ю Коссович // Вестник Санкт-Петербургского университета, 2016. Т. 3.: Сер. Математика. Механика. Астрономия, вып. 1. С. 139–146.
3. Коссович, Л. Ю. Асимптотический анализ нестационарного напряженно-деформированного состояния тонких оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях нормального типа / Л. Ю. Коссович // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Вып. 4(5). С. 2267 – 2268.
4. Коссович, Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях / Л. Ю. Коссович // Известия Саратовского университета. 2008. Т.8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 12 – 33.

5. Ковалев, В. А. Дальнее поле волны Рэлея для упругой цилиндрической оболочки при действии торцевой нагрузки / В. А. Ковалев, О. В. Таранов // Вестник Самарского государственного университета. 2007, вып. 4. С. 197 – 208.
6. Бажанова, Н. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла / Н. С.Бажанова, Л. Ю. Коссович, М. С. Сухоловская // Известия вузов. Северо – Кавказский регион. Естественные науки. 2000. №2. С. 17 – 24.
7. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер М. : Наука, 1976. 512 с.
8. Биргер, И. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов М. : Наука, 1986. 560 с.
9. Функция Хевисайда [Электронный ресурс] : Википедия – свободная энциклопедия. / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1312526 статей). Wikipedia®, 2001 – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Хевисайда (дата обращения: 05.04.2017). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 01:54, 20 марта 2017. Яз. рус.
10. Kaplunov, J. Dynamics of thin walled elastic bodies / J. Kaplunov, L. Kossovitch, E. Nolde, San Diego : Elsevier Science Publishing Co Inc, 226 p.
11. Коссович, Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек / Л. Ю. Коссович. Саратов : Изд-во СГУ, 1986. 176 с.
12. Преобразование Лапласа [Электронный ресурс] : Википедия – свободная энциклопедия. Электрон. дан. / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1312526 статей). Wikipedia®, 2001 – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Лапласа (дата обращения: 06.04.2017). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 03:30, 26 июня 2016. Яз. рус.

13. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М. Л. Краснов М.: Наука, 1975. 302 с.
14. Функция Эйри [Электронный ресурс] : Википедия –свободная энциклопедия / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1312526 статей). Wikipedia®, 2001 – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Эйри (дата обращения: 8.04.2017). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 06:46, 17 мая 2016. Яз. рус.
15. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 463 с.

