

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**Влияние ребра жесткости, частично перекрывающего план, на
напряженно-деформированное состояние пластинки под действием
кусочно-непрерывного нормального давления**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Деркач Валерии Михайловны

Научный руководитель
д. т. н., профессор


подпись, дата

Г. Н. Белосточный

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор


подпись, дата

Л. Ю. Коссович

Саратов 2017

Введение

В данной работе рассматривается влияние включений в виде ребра жесткости, частично перекрывающего план, на напряжено деформированное состояние пластинки под действием кусочно-непрерывного нормального давления. Все положения, принятые в данной работе, основаны на гипотезах теории ребристой полой оболочки двоякой кривизны.

Уравнения теории пологих оболочек строятся на базе гипотез Кирхгоффа-Лява. Для пологих оболочек, кроме указанных гипотез принимаются дополнительно следующие предположения:

- геометрия срединной поверхности оболочки такая же, как и геометрия плоскости ($g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0$);
- в уравнениях равновесия можно пренебречь произведениями перерезывающих сил на главные кривизны $\frac{T^{i3}}{R_i} = T^{i3} k_i \quad (i = 1, 2)$;
- а также не учитываются произведения тангенциальных компонент на главные кривизны $\frac{U}{R_1} = U k_1, \quad \frac{V}{R_2} = V k_2$.

Полагая главные кривизны нулю ($k_{11} = k_{22} = 0$), получим основные соотношения и уравнения теории пластин.

Актуальность работы состоит в том, что прямоугольные пластины, подкрепленные ребрами жесткости, являются одной из наиболее распространенных конструктивных форм. Они широко используются в гражданском и промышленном строительстве, в мостостроении, судостроении, машиностроении, самолетостроении и других отраслях современной техники.

Целью настоящей работы является определение во втором приближении прогибов и изгибающих моментов пластины под действием кусочно-непрерывной нормальной нагрузки. В связи с этим, можно выделить задачи для достижения цели:

- разобрать основные положения, гипотезы теории ребристой полой оболочки двоякой кривизны;
- вывести уравнения равновесия для прямоугольной пластинки, частично

подкрепленной ребром жесткости на основе континуальной модели в компонентах поля перемещения из вариационного принципа Лагранжа;

- сформулировать краевую задачу;
- подобрать базовую систему функций, тождественно удовлетворяющую всем краевым условиям шарнирного закрепления;
- определить во втором приближении функцию прогиба по методу Галеркина;
- определить во втором приближении изгибающие моменты, возникающие в геометрически нерегулярной пластинке;
- построить трехмерные изображения функции прогиба, иллюстрирующих влияние геометрических параметров пластинки на функцию прогиба.

Объектом исследования является геометрически нерегулярная пластинка, подкрепленная ребром жесткости, частично перекрывающим план, под действием кусочно-непрерывной нормальной нагрузки.

Структура и объем работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 39 листах машинописного текста, содержит 26 рисунков и 10 таблиц.

Основное содержание работы

Во введении приводятся основные предположения и гипотезы теории пологой ребристой оболочки двоякой кривизны, на которой основаны все положения, принятые в данной работе, обосновывается актуальность.

В первой главе рассматриваются основные положения и уравнения теории пологой оболочки двоякой кривизны, частично подкрепленной ребрами жесткости на основе континуальной модели.

Силовая функция упругой системы для оболочки, частично подкрепленной ребром [2,4]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b (e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_{xy} \tau_{xy}) dx dy dz, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений, связанные с деформациями уравнениями состояния:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [e_x + \nu e_y - \alpha(1+\nu)\theta(x, y, z, t)], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [e_y + \nu e_x - \alpha(1+\nu)\theta(x, y, z, t)], \\ \tau_{xy} &= G e_{xy},\end{aligned}\quad (2)$$

e_x, e_y, e_{xy} — компоненты тензора деформаций, которые связаны с компонентами поля перемещений срединной поверхности (u, v, w) равенствами [2,3]:

$$\begin{aligned}e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - r_0 W - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - t_0 W - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (3)$$

где r_0, t_0 — главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Закон изменения поля перемещений по толщине оболочки запишется в виде:

$$u^z = u + z \frac{\partial W}{\partial x}, \quad v^z = v + z \frac{\partial W}{\partial y}, \quad w^z = W. \quad (4)$$

Вектора положений точек внешней и внутренней поверхностей оболочки запишутся в виде [5, 6]:

$$\bar{R}^{\pm}(x, y) = \bar{r}(x, y) \pm z^*(x, y) \bar{e}^n, \quad (5)$$

где внешнюю поверхность оболочки описывает уравнение:

$$z^*(x, y) = \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} \varphi(x, x_i) H^*(y, y_j). \quad (6)$$

$\varphi(x, x_i)$ — элемент фундаментальной последовательности, сходящейся к δ -функции и такой, что [1]

$$\begin{cases} \varphi(x, x_i) \ll 1, \text{ при } x \geq x_i + \frac{a_i}{2} \text{ и } x \leq x_i - \frac{a_i}{2}, \\ \varphi(x, x_i) = 1, \text{ при } x = x_i; \end{cases}$$

$H^*(y, y_j) = H(y - y_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } y > y_j, \\ 0, & \text{при } y < y_j, \end{cases}$ функция Хевисайда, при изменении толщины оболочки в области $y_j \leq y \leq b$.

Далее подставляем (2) и (3) в (1) и интегрируем по переменной z в указанных пределах.

Затем из дифференциального вариационного принципа Лагранжа $\delta\mathcal{L} = 0$ получим систему дифференциальных уравнений, описывающих равновесие полой оболочки двойкой кривизны с быстроизменяющейся толщиной в двух направлениях.

Во второй главе рассматриваются основные уравнения теории тонких ребристых пластин.

Вариационным путем получено уравнение равновесия для функции прогиба:

$$\nabla^2 \nabla^2 W + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Phi^3 \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Phi^3 \right) + \frac{\partial}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Phi^3 \right) = \frac{q_z}{D}, \quad (7)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Третья глава посвящена определению функции прогиба и моментов.

В первом разделе третьей главы формулируется красная задача для пластинки, подкрепленной ребром, под действием кусочно-непрерывной нормальной нагрузки

$$q = \frac{q_0}{D} H(x - x_2),$$

на краях пластины выполняются условия шарнирного закрепления [4]

$$\text{при } x = 0, x = a, W = 0, M_1 = 0,$$

$$\text{при } y = 0, y = b, W = 0, M_2 = 0. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение равновесия (7) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W + \delta^3(x - x_1) H(y - y_1) \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \delta^3(x - x_1) \delta(y - y_1) + \\ + \delta^3(x - x_1) \frac{d\delta}{dy} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{q_0}{D} H(x - x_2), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\delta^3(x - x_1) = a_1(h_1/h)^3\delta(x - x_1)$.

тождественно удовлетворяющее краевым условиям шарнирного опирания всех четырех сторон (8), будем разыскивать в виде двойного тригонометрического ряда с постоянными коэффициентами

$$W(x, y) = \sum_{k,m} W_{km} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad (10)$$

где коэффициенты ряда определяются методом Галёркина [6].

Во втором приближении решение дифференциального уравнения равновесия (9) будем разыскивать в виде

$$W(x, y) = W_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + W_{12} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right). \quad (10)'$$

Во втором разделе третьей главы определяется функция прогиба во втором приближении.

На основании стандартных процедур метода Галёркина применительно к уравнению (9) получаем систему из двух алгебраически неоднородных линейных уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующего ряда (10)'.

Подставляя найденные коэффициенты W_{11} и W_{12} как решение алгебраической системы в формулу (10)', получим функцию прогиба W во втором приближении.

Далее проводится количественный анализ функции прогиба упругой системы «пластинка-ребро». Результаты представлены в таблицах.

Рассматривалось 5 случаев:

1) при условиях : $x = x_1 = \frac{a}{2}$; $x_2 = \frac{2a}{3}$; $y = \frac{3b}{8}$; $y_1 = \frac{3b}{4}$; $a = b$; $\frac{a_1}{a} = 0,01$;

Таблица 1-значение функции прогиба при условиях 1.

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	$0.932 \cdot 10^{-3}$

3	$0.861 \cdot 10^{-3}$
4	$0.745 \cdot 10^{-3}$
5	$0.608 \cdot 10^{-3}$

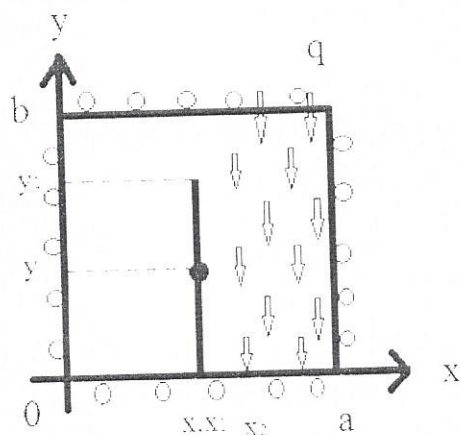


Рисунок 1- пластина, подкреплённая ребром, при условиях 1.

2) при условиях : $x = x_1 = \frac{5a}{6}$; $x_2 = \frac{2a}{3}$; $y = \frac{3b}{8}$; $y_1 = \frac{3b}{4}$; $a = b$; $\frac{a_1}{a} = 0,01$;

Таблица 2-значение функции прогиба при условиях 2.

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	$0.479 \cdot 10^{-3}$
3	$0.469 \cdot 10^{-3}$
4	$0.451 \cdot 10^{-3}$
5	$0.423 \cdot 10^{-3}$

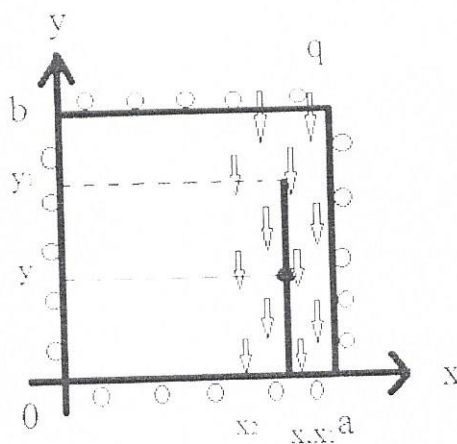


Рисунок 2 – пластина, подкреплённая ребром, при условиях 2.

3) при условиях : $x = x_1 = x_2 = \frac{2a}{3}$; $y = \frac{b}{4}$; $y_1 = \frac{b}{2}$; $a = b$; $\frac{a_1}{a} = 0,01$;

Таблица 3-значение функции прогиба при условиях 3.

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	$0.633 * 10^{-3}$
3	$0.611 * 10^{-3}$
4	$0.556 * 10^{-3}$
5	$0.464 * 10^{-3}$

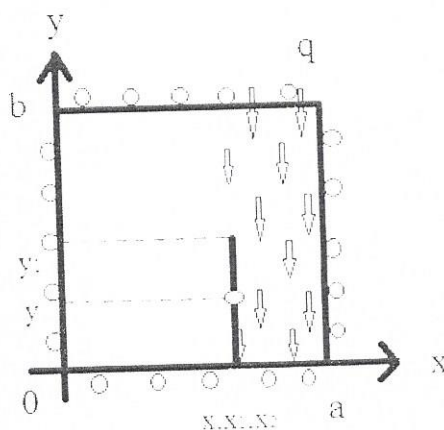


Рисунок 3 – пластина, подкреплённая ребром, при условиях 3.

4) при условиях : $x = x_1 = \frac{a}{2}$; $x_2 = \frac{2a}{3}$; $y = \frac{b}{6}$; $y_1 = \frac{b}{3}$; $a = b$; $\frac{a_1}{a} = 0,01$;

Таблица 4 – значение функции прогиба при условиях 4.

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	$0.520 * 10^{-3}$
3	$0.512 * 10^{-3}$
4	$0.485 * 10^{-3}$
5	$0.430 * 10^{-3}$

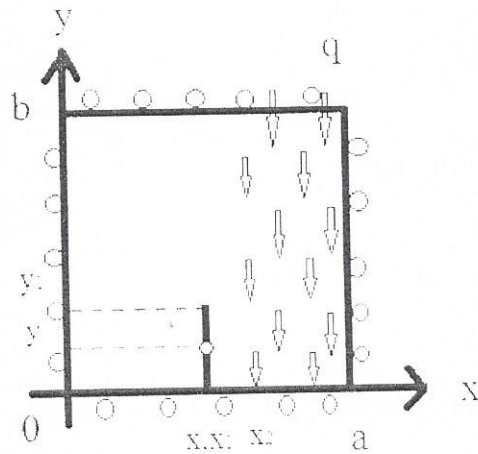


Рисунок 4 – пластина, подкреплённая ребром, при условиях 4.

5) при условиях : $x = \frac{a}{3}$; $x_1 = \frac{a}{2}$; $x_2 = \frac{2a}{3}$; $y = \frac{3b}{8}$; $y_1 = \frac{3b}{4}$; $a = b$; $\frac{a_1}{a} = 0,01$;

Таблица 5 – значение функции прогиба при условиях 5.

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	$0.807 \cdot 10^{-3}$
3	$0.745 \cdot 10^{-3}$
4	$0.645 \cdot 10^{-3}$
5	$0.526 \cdot 10^{-3}$

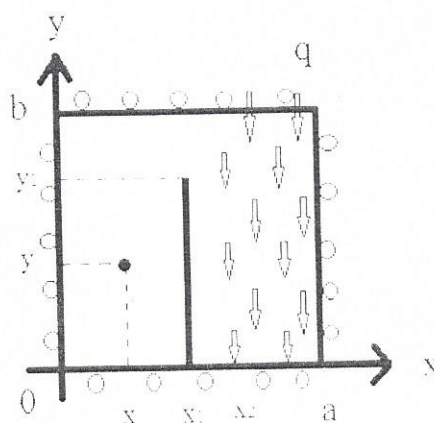


Рисунок 5 – пластина, подкреплённая ребром, при условиях 5.

Где $\left(\frac{h_1}{h}\right)$ - отношения высоты ребра к длине пластины.

Количественный анализ показал, что во всех случаях прогибы в точках убывают с увеличением относительной высоты ребра.

В третьем разделе третьей главы определяются изгибающие моменты во втором приближении, возникающие в геометрически нерегулярной пластине.

Найденную функцию прогиба W подставили в формулы для моментов:

$$\begin{aligned} M^{11} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \\ M^{22} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Далее проводится количественный анализ изгибающих моментов упругой системы «пластинка-ребро». Результаты представлены в таблицах.

Таблица 6 – значение относительного изгибающего момента при условиях 1.

$\frac{h_1}{h}$	$M_{11}^* = M^{11} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0119	0.0119
3	0.0110	0.0111
4	0.0096	0.0097
5	0.0078	0.0079

Таблица 7 – значение относительного изгибающего момента при условиях 2.

$\frac{h_1}{h}$	$M_{11}^* = M^{11} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0061	0.0061
3	0.0060	0.0060
4	0.0057	0.0058
5	0.0054	0.0054

Таблица 8 – значение относительного изгибающего момента при условиях 3.

$\frac{h_1}{h}$	$M_{11}^* = M^{11} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0081	0.0082
3	0.0079	0.0081
4	0.0072	0.0076
5	0.0061	0.0066

Таблица 9 – значение относительного изгибающего момента при условиях 4.

$\frac{h_1}{h}$	$M_{11}^* = M^{11} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0067	0.0067
3	0.0066	0.0068
4	0.0063	0.0067
5	0.0057	0.0062

Таблица 10 – значение относительного изгибающего момента при условиях 5.

$\frac{h_1}{h}$	$M_{11}^* = M^{11} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0103	0.0103
3	0.0095	0.0096
4	0.0065	0.0066
5	0.0067	0.0069

Количественный анализ показал уменьшение моментов с увеличением относительной высоты ребра.

В четвертой главе приводится построение трехмерного изображения функции прогиба, иллюстрирующих влияние геометрических параметров пластинки на функцию прогиба.

Заключение.

1. Изучена теория пологих оболочек и пластин, подкрепленных ребрами, частично перекрывающими их план.
2. Вариационным путем получено уравнение равновесия геометрически нерегулярной пластины.
3. Методом Галёркина получено приближенное аналитическое выражение для функции прогиба в случае геометрически нерегулярной пластины, шарнирно закрепленной по всему контуру, под действием кусочно-непрерывной нормальной нагрузки во втором приближении.
4. Проведен количественный анализ влияния геометрических параметров упругой системы по функции прогиба и изгибающим моментам.
5. Построено трехмерное изображение функции прогиба.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антосик, П., Микусинский, Я., Сикорский, Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, М. : Мир, 1976. 311 с.
2. Назаров, А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек / А. А. Назаров. Л. : Стройиздат, 1966. 303 с.
3. Рассудов, В. М., Красюков, В. П., Панкратов, Н. Д. Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек / В. М. Рассудов, В. П. Красюков, Н. Д. Панкратов. С. : Саратовский университет, 1973. 154 с.
4. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. Л. : Судпромгиз, 1962. 431 с.
5. Прикладная механика. Основы теории оболочек: учеб. пособие / П. А. Жилин. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
6. Канторович, Л. В., Крылов, В. И. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Л. : Физматгиз, 1962. 708 с.

16.06.17 BDeff