

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК
ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В ТЕРМОУПРУГОМ
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Гуляева Станислава Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м. н.



подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., профессор



подпись, дата

Л. Ю. Коссович

Саратов 2017

Введение

Актуальность темы. Несмотря на бурное развитие вычислительной техники в современном мире, проблема разработки асимптотических методов решения задач о колебаниях и распространении волн в упругих телах остается актуальной, в особенности в применении к задачам термоупругости. Развитие асимптотических методов позволит эффективно описать волновые фронты, быстро затухающие погранслои и другие явления, специфические для волновых процессов.

Целью данной работы является получение асимптотик для характеристик поверхностной волны в термоупругом полупространстве при двух вариантах граничных условий на поверхности: в первом случае на поверхности поддерживается постоянная температура, во втором случае поверхность считается теплоизолированной.

Научная значимость работы состоит в развитии асимптотических методов, связанных с представлением остальных параметров задачи в виде степеней малого геометрического параметра, на случай задачи о распространении поверхностной волны в термоупругом полупространстве.

Структура и объем работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников, включающего 31 наименование. Работа изложена на 44 листах машинописного текста без приложений, содержит 10 рисунков и 3 таблицы.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается важность асимптотического анализа характеристик поверхностной волны в термоупругом полупространстве. Также обзревается основные вехи в развитии асимптотических методов и поверхностных волн.

В первом разделе дана постановка задачи о распространении поверхностной волны в термоупругом полупространстве в декартовых координатах x, y (область $0 \leq x \leq +\infty, -\infty \leq y \leq +\infty$). Приводятся основные уравнения термоупругости [1]: уравнения равновесия, закон Дюамеля-

Неймана, выражения деформаций через перемещения и уравнение теплопроводности.

Рассматриваются два варианта граничных условий:

1) постоянная температура

$$x = 0: \sigma_x = 0, \sigma_{xy} = 0, \theta = 0;$$

2) теплоизолированная поверхность

$$x = 0: \sigma_x = 0, \sigma_{xy} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

Вводятся безразмерные переменные и все уравнения приводятся к безразмерному виду.

Во втором разделе выводятся дисперсионные уравнения для двух вариантов граничных условий.

Перемещения представляем через потенциалы φ и ψ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Выражаем напряжения через функции φ и ψ :

$$\sigma_x = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\kappa^2} - 2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{m_0}{\kappa^2} \theta; \quad (2)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{1}{\kappa^2} - 2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{m_0}{\kappa^2} \theta; \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Подставляя напряжения в уравнение движения и уравнение теплопроводности, получаем уравнения для потенциалов и выражение для температуры

$$\left(\nabla^2 - k_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\nabla^2 \varphi - \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) - k_0^2 m_0 \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi) = 0; \quad (5)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \quad (6)$$

$$\theta = \frac{1}{m_0} \left(\nabla^2 \varphi - \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right). \quad (7)$$

Решение уравнений (5) и (6) ищем в виде, обычно принимаемом при исследовании поверхностных волн [2-6]

$$\varphi = f(x) e^{i(\chi y - \omega t)}; \quad (8)$$

$$\psi = g(x) e^{i(\chi y - \omega t)}. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнения (5) и (6), получаем дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{d^2 f}{dx^2} \left(-2\chi^2 + i\omega k_0^2 + \kappa^2 \omega^2 + k_0^2 m_0 \eta_0 i\omega \right) + \\ + f \left(\chi^4 - i\omega k_0^2 \chi^2 - \kappa^2 \omega^2 \chi^2 - k_0^2 m_0 \eta_0 i\omega \chi^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - g(\chi^2 - \omega^2) = 0. \quad (11)$$

Записывая общее решение уравнений (10) и (11) и оставляя слагаемые, соответствующие затуханию при удалении вглубь полупространства, имеем

$$f(x) = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{-\lambda_3 x}; \quad (12)$$

$$g(x) = C_2 e^{-\lambda_2 x}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (8) и (9), получаем решения для потенциалов.

Рассмотрим первый вариант граничных условий. Удовлетворяя граничным условиям, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \left(\chi^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) C_1 e^{-\lambda_1 x} - i\chi \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 x} + \left(\chi^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) C_3 e^{-\lambda_3 x} = 0 \\ i\chi \lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 x} + \left(\chi^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) C_2 e^{-\lambda_2 x} + i\chi \lambda_3 C_3 e^{-\lambda_3 x} = 0. \quad (14) \\ (\lambda_1^2 - \chi^2 + \kappa^2 \omega^2) C_1 e^{-\lambda_1 x} + (\lambda_3^2 - \chi^2 + \kappa^2 \omega^2) C_3 e^{-\lambda_3 x} = 0 \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель системы (14), приходим к дисперсионному уравнению

$$(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \left[\left(\chi^2 - \frac{\omega^2}{2} \right)^2 - \chi^2 \lambda_2 \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \chi^2 + \kappa^2 \omega^2}{\lambda_1 + \lambda_3} \right] = 0. \quad (15)$$

Для второго варианта граничных условий получено дисперсионное уравнение

$$(\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_3^2 - \chi^2 + \kappa^2 \omega^2) \cdot \left[\left(\chi^2 - \frac{\omega^2}{2} \right)^2 - \chi^2 \lambda_2 \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_3^2 - \chi^2 + \kappa^2 \omega^2} \right] = 0. \quad (16)$$

Третий раздел посвящен асимптотическому анализу выведенных уравнений, для которого применяются асимптотические методы, описанные в монографиях [7-9]. Вводится геометрический малый параметр $\eta = \frac{b}{L} \ll 1$, где L – характерный размер области распространения волны, при этом размер b можно понимать как характерный масштаб интересующих нас длин волн. Например, если поверхностная волна используется для обнаружения дефектов поверхности некоторого элемента конструкции, под величиной b можно понимать характерный размер дефекта, а под величиной L – наибольший размер длин волн, регистрируемых измерительной аппаратурой.

Характерная длина волны и характерный временной масштаб представлены как степени малого параметра: $\chi \sim \eta^{-q}$, $\omega \sim \eta^{-a}$, где q – показатель изменяемости, a – показатель динамичности.

Безразмерные параметры ε и k_0 также представлены как степень малого параметра: $\varepsilon \sim \eta^e$, $k_0 \sim \eta^{-k}$. Введены понятия:

e – показатель теплопроводности;

k_0 – показатель связности.

Далее принимается, что $q = a < 2k$. Это ограничение соответствует ограничению на значение размерной частоты $\omega \ll \omega_*$, где $\omega_* = c_\varepsilon c_2^2 / \lambda_T$ – частота, на которой скорость плоской тепловой волны (пропорциональная $\sqrt{\omega}$) становится равной скорости волны сдвига.

В данной работе рассматривается 5 разных материалов: алюминий, сталь, стекло, фарфор и полиэтилен. Приведена таблица, где представлены параметры (коэффициент линейного термического расширения, удельная теплоемкость при постоянной деформации, коэффициент теплопроводности, плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона) этих материалов.

Таблица 1– Параметры материалов

Название материала	Коэффициент линейного термического расширения, $10^{-6} \frac{1}{K}$	Удельная теплоемкость при постоянной деформации, $10^5 \frac{KJ}{мг^2 K}$	Коэффициент теплопроводности, $\frac{KJ}{с^2 K}$	Плотность, $10^3 \frac{KJ}{м^3}$	Модуль Юнга, $10^9 \frac{KJ}{мс^2}$	Коэффициент Пуассона
Алюминий	23.8	24.29	220	2.7	70	0.34
Сталь	11.7	35.88	45	7.85	200	0.28
Стекло	8.1	16.75	0.7	2.3	70	0.25
Фарфор	3	18.4	1.4	2.5	59	0.23
Полиэтилен	200	18	0.3	0.92	0.14	0.3

Для рассмотренных материалов частота ω_* изменяется от $1 \cdot 10^{11}$ Гц (алюминий) до $3 \cdot 10^{13}$ (фарфор), что значительно превосходит диапазон частот, интересных для практики. В таблице 2 представлены значения показателей теплопроводности и связности при $b = 1 \cdot 10^{-3}$ м и $\eta = 0.001$.

Таблица 2 – Значения показателей

Название материала	k	e
Алюминий	0.756	0.516
Сталь	0.9	0.692
Стекло	1.154	0.868
Фарфор	1.102	1.211
Полиэтилен	1.027	0.801

Как видно из таблицы 2, при данных значениях параметров показатели e , k ограничены интервалом $[0.5, 1.5]$. Вычисления при других значениях параметров b и η показывают, что если уменьшение параметра η связано с возрастанием величины L , параметры e , k стремятся к нулю, оставаясь положительными.

Далее рассматриваются характеристические уравнения для уравнения (10)

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \lambda^2(-2\chi^2 + i\omega k_0^2 + \kappa^2 \omega^2 + \varepsilon k_0^2 i\omega) + \\ & + \chi^4 - i\omega k_0^2 \chi^2 - \kappa^2 \omega^2 \chi^2 + k_0^2 \kappa^2 i\omega^3 - \varepsilon k_0^2 i\omega \chi^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \lambda_0^4 \eta^{4s} + \lambda_0^2 \eta^{2s}(-2\chi_0^2 \eta^{-2a} + i\omega k_{0,0}^2 \eta^{-2k-a} + \kappa^2 \omega_0^2 \eta^{-2a} + \varepsilon_0 k_{0,0}^2 i\omega_0 \eta^{e-2k-a}) + \\ & + \chi_0^4 \eta^{-4a} - i\omega_0 k_{0,0}^2 \chi_0^2 \eta^{-2k-3a} - \kappa^2 \omega_0^2 \chi_0^2 \eta^{-4a} + \\ & + k_{0,0}^2 \kappa^2 i\omega_0^3 \eta^{-2k-3a} - \varepsilon_0 k_{0,0}^2 i\omega_0 \chi_0^2 \eta^{e-2k-3a} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Порядки корней уравнения определяются методом подбора параметра s . Результаты сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – Асимптотика для нулевого приближения

1 случай	2 случай	3 случай
$4s = 2s - 2k - a$	$4s = -2k - 3a$	$2s - 2k - a = -2k - 3a$
$s = \frac{-2k - a}{2}$	$s = \frac{-2k - 3a}{4}$	$s = -a$
$-2k - 3a > 4s$	$2s - 2k - a < 4s$	$4s > -2k - 3a$
$\lambda^4 + \lambda^2 i\omega k_0^2 = 0$	Приводит к противоречию	$\lambda^2 - \chi^2 + \kappa^2 \omega^2 = 0$
$\lambda_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\omega k_0^2}$		$\lambda_1 = \sqrt{\chi^2 - \kappa^2 \omega^2}$

Асимптотика для нулевого приближения соответствует несвязанной теории термоупругости. Решение для поверхностной волна в этом случае

совпадает с решением для волны Рэлея в упругом полупространстве. При выводе асимптотики первого порядка. Вводится ограничение, что $a < 2k - e$.

Таблица 4 – Асимптотика для первого приближения

$\lambda^4 + \lambda^2(i\omega k_0^2 + \varepsilon k_0^2 i\omega) = 0$	$\lambda^2(1 + \varepsilon) - \chi^2(1 + \varepsilon) + \kappa^2\omega^2 = 0$
$\lambda_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\omega k_0^2(1 + \varepsilon)}$	$\lambda_1 = \sqrt{\chi^2 - \frac{\kappa^2\omega^2}{1 + \varepsilon}}$

Полученные корни подставляются в уравнения (15) и (17). Путем применения стандартной техники асимптотического решения уравнений получаются асимптотики для скорости поверхностной волны в термоупругом полупространстве: для первого варианта граничных условий в вид

$$c = c_R + \frac{\sqrt{1 - c_R^2} \frac{\kappa^2 c_R^2}{2\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}} \frac{\sqrt{\chi}\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2} - e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{c_R k_0^2}}{\sqrt{\chi}\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{c_R k_0^2}} \varepsilon, \quad (19)$$

$$2c_R - c_R^3 + \frac{c_R \sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}}{\sqrt{1 - c_R^2}} + \frac{c_R \kappa^2 \sqrt{1 - c_R^2}}{\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}}$$

для второго – в виде

$$c = c_R + \frac{\frac{1}{2} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{c_R \chi k_0^2}}{2\chi\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}} - \frac{\chi\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}}{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{c_R \chi k_0^2}}}{\sqrt{1 - c_R^2} \chi \kappa^2 c_R^2} \varepsilon. \quad (20)$$

$$2c_R - c_R^3 + \frac{c_R \sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}}{\sqrt{1 - c_R^2}} + \frac{c_R \kappa^2 \sqrt{1 - c_R^2}}{\sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}}$$

В четвертом разделе представлено сравнение результаов расчетов по полученным выше асимптотикам с численным решением для рассматриваемых материалов.

Результаты для первого варианта граничных условий представлены на рисунках 1-5, для второго – на рисунках 6-10.

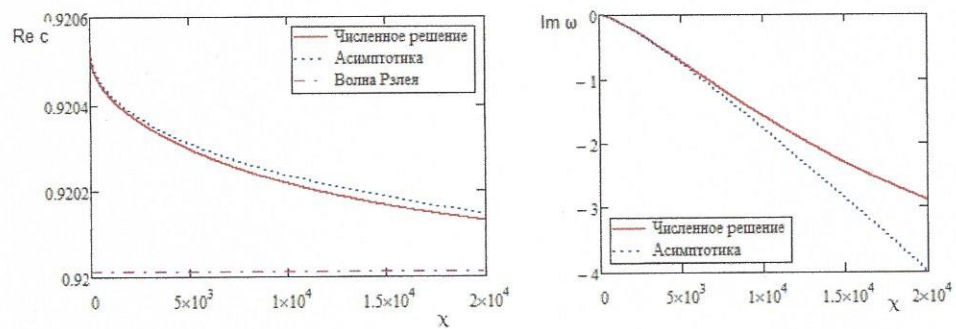


Рисунок 1 –Алюминий.

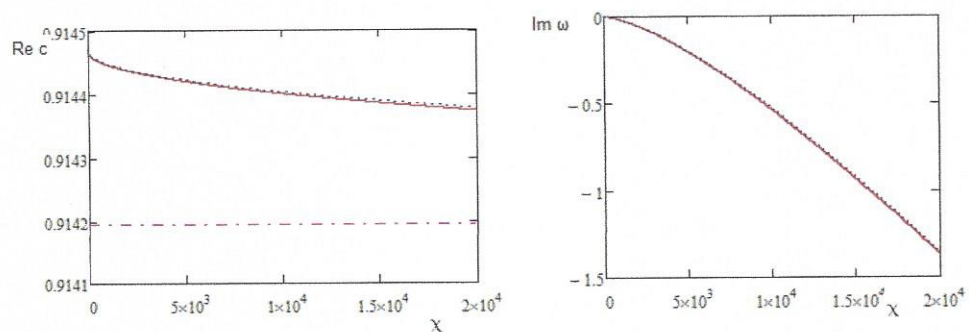


Рисунок 2 – Сталь.

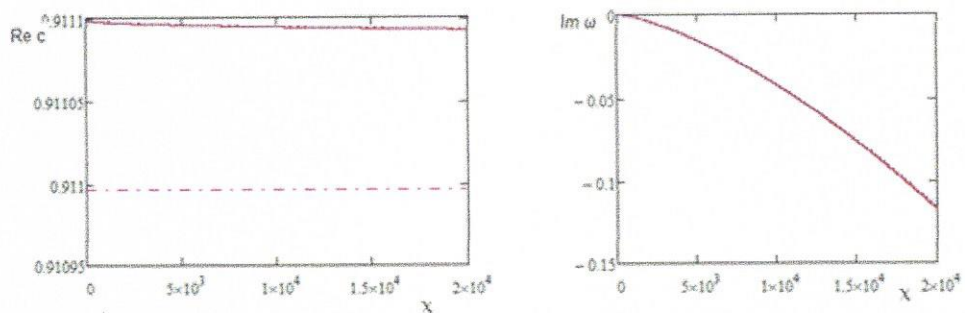


Рисунок 3 – Стекло.

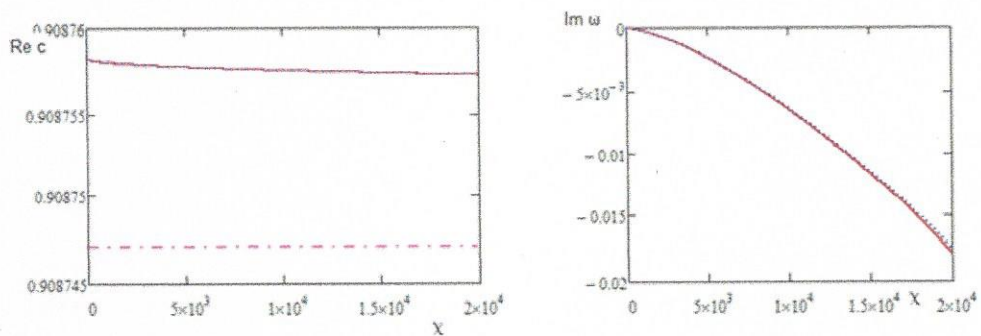


Рисунок 4 – Фарфор.

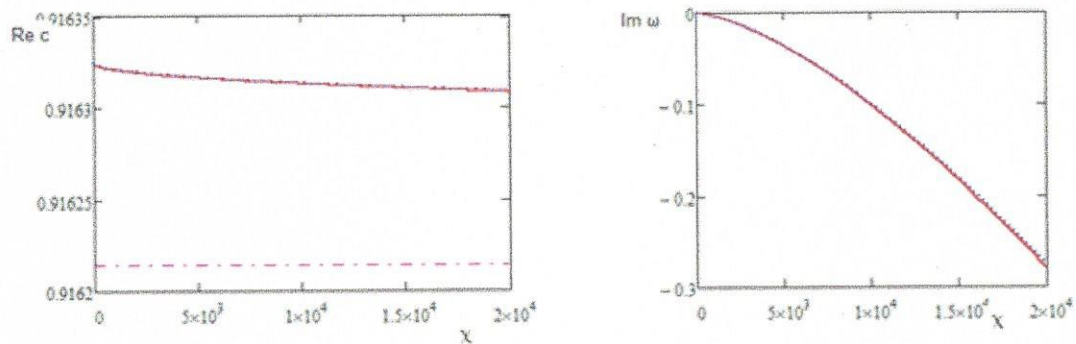


Рисунок 5 – Полиэтилен.

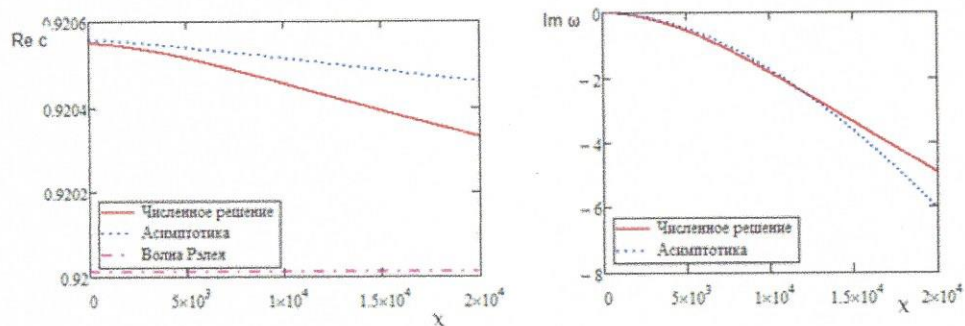


Рисунок 6 – Алюминий.

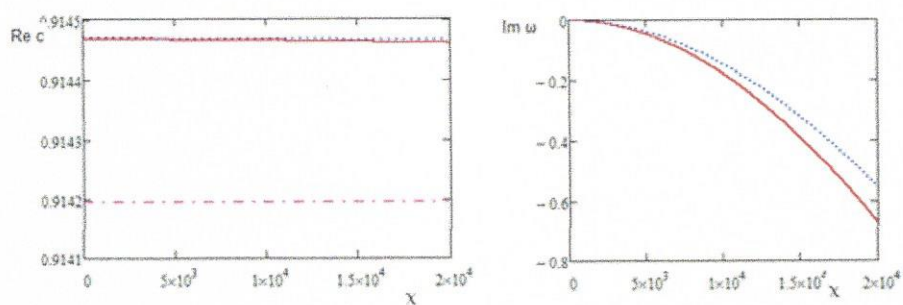


Рисунок 7 – Сталь.

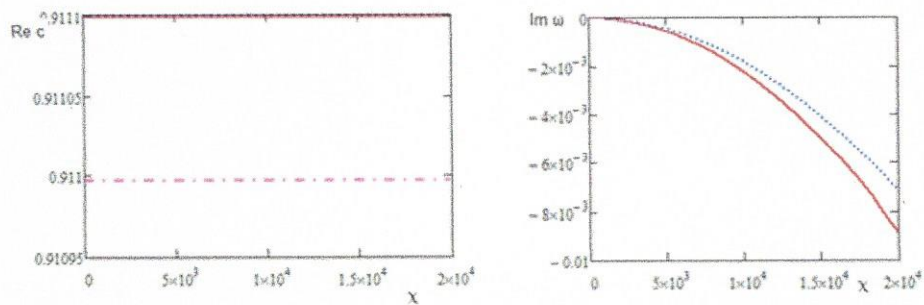


Рисунок 8 – Стекло.

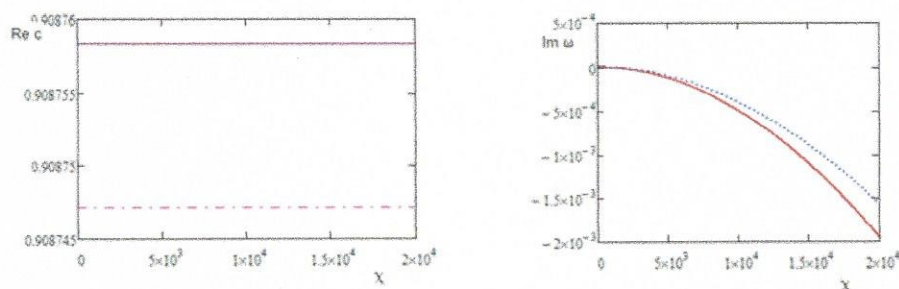


Рисунок 9 – Фарфор.

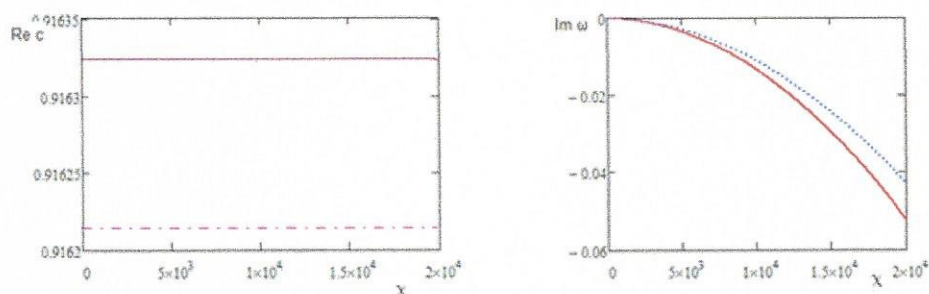


Рисунок 10 – Полиэтилен.

Заклучение

Анализируя полученные асимптотики и численные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. В отличие от поверхностной волны в упругом полупространстве, поверхностная волна в термоупругом полупространстве обладает дисперсией.
2. Тепловое расширение материала приводит к увеличению скорости распространения поверхностной волны и появлению малого затухания.
3. Степень влияния теплового расширения на поверхностную волну определяется значением показателя связности e , при этом в диапазоне частот, интересных для практики, оно весьма мало. Наибольшее влияние теплового расширения на термоупругую поверхностную волну обнаружено в случае алюминия
4. Использование предложенного в данной работе варианта асимптотического анализа позволяет без громоздких выкладок получить приближенные формулы для параметров поверхностной волны.

Список использованных источников

1. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. М.: Мир, 1970. 256 с.
2. Rayleigh, J. W. S. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid / J. W. S. Rayleigh // Proceedings of the London Mathematical Society. 1885. Volume 17, № 253. P. 4–11.
3. Белубекян, М.В. Поверхностные волны в упругих средах / М. В. Белубекян // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Институт механики НАН Армении, Ереван. 1997. С. 79–96.
4. Викторов, И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах (обзор) / И. А. Викторов // Акустический журнал. 1979. Т. 25, № 1. С. 1–17.
5. Вильде, М. В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М. В. Вильде, Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 280 с.
6. Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. М.: Киев: Наук. думка, 1981. 283с.
7. Kaplunov, J. D. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies / J. D. Kaplunov, L. Yu. Kossovich, E. V. Nolde, E.V. M.: SanDiego: AcademicPress, 1998. 226 p.
8. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек./ А. Л. Гольденвейзер. М.: Наука, 1976. С.512.
9. Гольденвейзер, А. Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б., П. Е. Товстик. М.: Наука, 1979. С. 384.

16.06.17

Григорьев