Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Сходимость метода Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Механико-математического факультета
Пашковой Яны Сергеевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ________________ В. В. Корнев
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ А. П. Хромов
подпись, дата

Саратов, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Метод Фурье - один из важнейших математических методов.

Впервые строгое обоснование метода Фурье смог дать академик В.А.Стеклов.

Метод Фурье получил широкое распространение, в этой области были достигнуты значительные успехи И.Г.Петровским, В.И.Смирновым, О.А.Ладыженской, В.А.Ильиным.

Но у данного подхода есть существенный недостаток: требуется завышение гладкости начальных данных.

В ходе исследований по ускорению сходимости рядов Фурье А.Н.Крылов разработал прием, который сводит вопрос о дифференцировании ряда к изучению двух других рядов,которые получаются путем разбиения первого. Один из этих рядов точно суммируется, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно дифференцировать почленно. А.Н.Крылов успешно преодолел трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач.

В.А.Чернятин, воспользовавшись приемом А.Н.Крылова и асимптотикой для собственных значений и собственных функций, успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, более того, в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н.Крылова, В.А.Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий исследовать смешанные задачи методом Фурье с исчерпывающей полнотой. Кроме того ставится много новых важных вопросов в теории функций.

Резольвентный подход к методу Фурье, который излагается в работах А.П.Хромова, В.В.Корнева, М.Ш.Бурлуцкой позволяет найти решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с ослабленными условиями гладкости без использования информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи.

В данной работе исследуется резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные.

Целью данной работы является обоснование сходимости метода Фурье к классическому решению поставленной задачи при более слабых требованиях, чем в известных результатах.

Данная работа состоит из введения,основной части, заключения и списка использованных источников. Основная часть включает в себя 7 глав:

1. Постановка задачи;
2. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора;
3. Формула для резольвенты;
4. Связь метода Фурье со спектральной задачей;
5. Случай ненулевых начальных данных;
6. Вспомогательные утверждения;
7. Теорема о классическом решении задачи.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 рассматривается смешанная задача следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t),$$
$$(x,t) \in Q, \text{ где } Q = [0,1] \times (-\infty, \infty) \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad {u'}_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где все функции комплекснозначные, причем

$$q(x) \in C[0,1], \ \varphi(x) \in C^2[0,1], \ \psi(x) \in C^1[0,1] \text{ и функция } f(x,t)$$
$$\text{непрерывна в } Q. \tag{4}$$

Определение 1. *Классическим решением данной задачи будем называть функцию $u(x,t)$, для которой выполняются два условия:*
1) $u(x,t) \in C^2(Q)$,
2) $u(x,t)$ удовлетворяет данной задаче.

Наклыдываем необходимые условия для существования классического решения:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(1) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0, \tag{6}$$

Дополнительно требуем, чтобы

$$f'_t \in C(Q). \tag{7}$$

Основной задачей данной ВКР является доказательство того факта, что при сделанных предположениях формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится и его сумма является классическим решением поставленной задачи.

Далее в работе приводится ряд теорем, близких к результатам основной теоремы данной ВКР. В качестве доказательства, что некоторые условия в этих теоремах не являются необходимыми, приводится контрпример.

В главе 2 исследовалась вспомогательная спектральная задача с вещественнозначным потенциалом, для которой была получена асимптотика собственных значений. Эта асимптотика была распростронена на случай комплексного потенциала.

Используя результаты раздела 2 применительно к оператору L, который задается соотношениями: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0$, заключаем, что для собственных значений $\lambda_n = \rho_n^2$ этого оператора при достаточно больших n справедлива асимптотика:

$$\rho_n = n\pi + \varepsilon_n, \quad n = n_0, n_{0+1}, ..., \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В основе исследования данной ВКР лежит резольвентный подход, разработанный Августом Петровичем Хромовым. **В главе 3** дается определение резольвенты оператора L, вводится вспомогательная задача и доказывается лемма о явной формуле для резольвенты.

Определение 2. *Резольвентой оператора L называется оператор-функция*

$$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1},$$

где E - единичный оператор, λ - спектральный параметр.

Пусть $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0,\rho) = z_2'(0,\rho) = 1$ и $z_1'(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0$ соответственно. Функции $z_i(x,\rho)$ целые по ρ и λ, $\quad i = 1, 2$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для R_λ имеет место формула*

$$R_\lambda g = z_2(x,\rho)(g, z_1) - v(x,\rho)(g, z_2) + \int_0^x M(x,\xi,\rho) g(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } (g, z) = \int_0^1 g(x) z(x) dx, \quad v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho) z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)},$$

$$a\ M(x,\xi,\rho)=\begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho)\end{vmatrix}.$$

В главе 4 устанавливается связь метода Фурье со спектральной задачей для оператора второго порядка.

Вводятся в рассмотрение окружности $\theta_n=\{\rho:|\rho-\pi n|=\delta\}$, где $\delta>0$ и достаточно мало, $n\geq n_0$, а номер n_0 таков, что внутри окружности θ_n находится единственное ρ_n. Через γ_n обозначается образ θ_n в λ-плоскости ($\lambda=\rho^2,\quad Re\rho\geq 0$).

Формальное решение поставленной задачи по методу Фурье берется в виде

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t+ \\ +\frac{1}{\rho}(R_\lambda\psi)(x)\sin\rho t+\int\limits_0^t(R_\lambda f)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\ \Bigg]\ d\lambda, \tag{8}$$

где значение $R_\lambda f$ - значение резольвенты на функции $f(x,\tau)$ как функции переменной x. Значение $r>0$ фиксировано, а контур $|\lambda|=r$ таков, что содержит внутри только $\lambda_n,\quad n<n_0$, а на самом контуре собственных значений нет.

Правая часть формулы представляет собой формальный ряд, построенный по методу Фурье.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3), то для него справедлива формула (8) и ряд сходится равномерно по x из отрезка $[0,1]$ для любого фиксированного значения переменной t.*

В главе 5 приводятся частные случаи задачи (1)-(3), в том числе случай нулевых начальных данных $q(x)=\varphi(x)=\psi(x)=0$. Осуществляется переход к новой задаче (9)-(11).

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = 0, \quad {u'}_t(x,0) = 0. \tag{11}$$

В данной главе вводятся в рассмотрение оператор L_0 с собственными значениями $\lambda_n^0 = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, ...$) и соответствующая этому оператору резольвента $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, где L_0 - оператор, который вводится аналогично оператору L при нулевых начальных данных и нулевом потенциале. Для данной резольвенты справедлива формула

$$R_\lambda^0 g = z_2^0(x,\rho)(g, z_1^0) - v^0(x,\rho)(g, z_2^0) + M_\rho^0 g,$$

где $z_1^0,\ z_2^0,\ v^0,\ M_\rho^0$ - те же $z_1,\ z_2,\ v,\ M_\rho$, но взятые для оператора L_0. В этом случае

$$z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, \quad z_2^0(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sin\rho x, \quad v^0(x,\rho) = \sin\rho x\ \operatorname{ctg}\rho.$$

Далее доказывается теорема, справедливая для случая нулевых начальных данных.

Теорема 2. *Если выполнено условие $f(0,0) = f(1,0) = 0$, то классическое решение задачи (1)-(3) при $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ существует и дается формулой*

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R_\lambda^0 f)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda,$$

где $R_\lambda^0 f$ - значение R_λ^0 на функции $f(x,\tau)$ как функции переменного x, причем при любом фиксированном t ряд сходится равномерно по $x \in [0,1]$.

В главе 6 приводится ряд вспомогательных лемм, необходимых для доказательства основной теоремы. Леммы 4-6 доказываются.

Лемма 2. *При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы*

$$v^{(j)}(x,\rho) = v^{0^{(j)}}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0,1,2,$$

где оценки $O(\rho^{j-1})$ равномерны по x из отрезка $[0,1]$.

Лемма 3. *Для $z_2(x,\rho)$ имеет место формула*

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt,$$

где $K(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, и $K(x,0) = 0$ ($K(x,t)$ не зависит от ρ).

Лемма 4. *Если $\rho \in \tilde{\gamma}_n$, то справедливы формулы*

$$(g, z_2) = \frac{(g_1(\xi)\cos\mu\xi,\ \sin\pi n\xi) + (g_1(\xi)\sin\mu\xi,\ \cos n\pi\xi)}{n\pi + \mu},$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{(g_2(\xi)\cos\mu\xi,\ \cos\pi n\xi) - (g_2(\xi)\sin\mu\xi,\ \sin n\pi\xi)}{(n\pi + \mu)^2},$$

где $\rho = \pi n + \mu,\ \mu \in \tilde{\gamma}_0,\ K(s,\xi)$ непрерывно дифференцируема по переменным $s,\ \xi \in [0,1]$,

$$g_1(\xi) = g(\xi) + \int\limits_\xi^1 K(s,\xi)g(s)ds,$$

$$g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int\limits_\xi^1 K'_\xi(s,\xi)g(s)ds.$$

Лемма 5. *Обозначим через $\gamma(x)$ функции $\cos x$ и $\sin x$. Пусть $f(x,t) \in C(Q_T), \quad f(x,t,\mu) = f(x,t)\gamma(\mu x), \quad \mu \in \tilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(t,\mu) = (f(x,t,\mu), \gamma(n\pi x))$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}\left|\beta_n(t,\mu)\right| \le c\left(\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где c - постоянная, не зависящая от $t,\ \mu,\ c_1,\ c_2$.

Далее вводится новое обозначение $a_n(x,t)$ и доказывается лемма о возможности почленного дифференцирования $a_n(x,t)$ по x и t:

$$a_n(x,t) = \int\limits_{\gamma_n} \left(\int\limits_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x,\tau) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda.$$

Лемма 6. *Ряды*

$$\sum_{n \ge n_0} a^{(j)}_{n,x^j}(x,t) \ \text{и} \ \sum_{n \ge n_0} a^{(j)}_{n,t^j}(x,t),$$

где $j = 0, 1, 2$, *сходятся абсолютно и равномерно по* $(x,t) \in Q_T$.

В главе 7 изложена основная идея данной работы. Формальное решение (8) представляем в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \ge n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left(\int\limits_0^t (R_\lambda^0 f_1) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{12}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \ge n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin\rho t}{\rho} \, d\lambda, \tag{13}$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \ge n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left(\int\limits_0^t (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{14}$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \ge n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left((R_\lambda \varphi) \cos\rho t + \int\limits_0^t (R_\lambda f_2) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{15}$$

$$f_1(x,\tau) = f(x,\tau) - f_2(x), \quad f_2(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x).$$

Лемма 7. *Ряд (12) сходится и функция* $u_1(x,t)$ *является классическим решением задачи (1)-(3) при* $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, *нулевом потенциале с неоднородностью* $f_1(x,t)$.

Лемма 8. *Ряд (13) сходится и функция* $u_2(x,t)$ *есть классическое решение задачи (1)-(3) при* $\varphi(x) = 0$ *и* $f(x,t) = 0$.

Лемма 9. *Ряд (15) сходится к функции* $\varphi(x)$.

Наиболее сложным для изучения слагаемым в разбиении $u(x,t)$ является u_3, с целью его изучения была доказана лемма 10.

Лемма 10. *Ряд (14) сходится и функция $u_3(x,t)$ непрерывна вместе со своими частными производными $u''_{3,xx}(x,t)$ и $u''_{3,tt}(x,t)$, причем*

$$u_3(0,t) = u_3(1,t) = u_3(x,0) = u'_{3,t}(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in R,$$

$$u''_{3,tt}(x,t) - u''_{3,xx}(x,t) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} q(x) \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left(\int\limits_0^t (R_\lambda f_1) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda.$$

Основным результатом данного раздела и всей работы в целом является теорема 3.

Теорема 3. *Если выполняются условия (4)-(7), то при любых $x \in [0,1]$ и $t \in R$ формальный ряд (8)*

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \Bigg[(R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t +$$
$$+ \frac{1}{\rho} (R_\lambda \psi)(x) \sin \rho t + \int\limits_0^t (R_\lambda f)(x,\tau) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \Bigg] d\lambda$$

сходится и его сумма $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)-(3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе исследовался резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные. Строго говоря, не все из этих требований являются минимальными, но они более слабые, чем в известных результатах.

Важным результатом работы также является полученная явная формула для резольвенты.

Доказательство основной теоремы опирается на идею о представлении решения исходной задачи в виде суперпозиции решений частных случаев этой задачи.