Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

**Теорема равносходимости разложения по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией, имеющей разрывы**

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Наронова Артёма Сергеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
старший преподаватель | | А. В. Голубь
уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор | | А. П. Хромов
уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2017

## Введение.

Задачам равносходимости разложений по собственным
и присоединенным функциям (с.п.ф.) дифференциального
оператора посвящены многочисленные научные исследования, среди которых и работы современных математиков В.А. Ильина, А.М. Седлецкого, А.А. Шкаликова.

А.П. Хромовым в [2] впервые были рассмотрены
интегральные операторы, ядра которых имеют скачки на линиях $t = i$ и $t = 1 - x$, а именно,

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t) f(t)\, dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t) f(t)\, dt +$$

$$+\alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)\, dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)\, dt \qquad (0.1)$$

были получены формулы обращения для операторов (1). Теорема равносходимости для операторов вида (1) в [8] была доказана для оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)\, dt.$$

В полученной теореме равносходимости удалось
освободиться от требования трудно проверяемого условия
регулярности но Биркгофу граничных условий обратного
оператора, что существенно упрощает формулировку результата. Результаты из [2], [8] явились первыми в исследовании
спектральных свойств интегральных операторов вида (1). В настоящий момент есть целый ряд интересных работ п по другим задачам спектрального анализа операторов вида (1), при
некоторых ограничениях на $A_i(x,t)$ и $\alpha_i$

Мы будем рассматривать интегральный оператор,
рассмотренный в статье [5] и оператор простейшего вида $A_0$ рассмотренный в статье [21]

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A\left(\theta(x),\ t\right) \cdot f(t)\, dt,$$

$$\text{где } \theta(x) = \frac{1}{2} - x \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ и } \theta(x) = \frac{3}{2} - x \text{ при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) = x$, причём $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В первой главе** рассмотрим обращение интегрального оператора с инволюцией, имеющей разрывы. Для этого рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A\left(\theta(x),\ t\right) \cdot f(t)\, dt, \tag{0.2}$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) = x$, причём $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$.

Требования на ядро оператора (1): функция $A(x,t) = 0$ при $t \geqslant x$, $A(x - x_0) \equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x,t)$ непрерывны при $t < x$ и $k + l \leqslant 2$

**Лемма 1.** *Функция*

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} B_{i,j}(x,t)\ (i,\ j = 1,\ 2)\ k + l \leqslant 2$$

*непрерывны всюду, кроме быть может,* $t + x = \frac{1}{2}$ *и*

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{i,j}(x,t)\Big|_{t + \frac{1}{2} - x \pm 0},\ \frac{\partial}{\partial x} B_{i,j}(x,\gamma)(\gamma = 0, \frac{1}{2})$$

*непрерывно дифференцируемы.*

**Лемма 2.** *Если* $y(x) = Af(x)$, *то*

$$z(x) = Bg(x), \quad x \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right], \tag{0.3}$$

*где* $z(x) = (z_1(x),\ z_2(x))^T$ *($T$ - знак транспонирования),*

$$z_1(x) = y(x),\ z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right),\ g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$$

,

$$g_1(x) = y(x),\ g_2(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right),\ Bg(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t) g(t) dt.$$

**Лемма 3.** *Оператор* $B^{-1}$ *существует тогда и только тогда, когда* $rang\ M = m$, *где*

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi},\ \psi)^T \\ \int_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\tilde{\varphi}^T(t)dt \end{pmatrix},\ E - \text{единичная матрица } m \times m$$

$$(\tilde{\varphi},\ \psi) = \{\tilde{\varphi}_j,\ \psi_k\}_{j,k=1}^m,\ \tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1,\ \cdots,\ \tilde{\varphi}_m)$$

**Лемма 4.** *Пусть* $B^{-1}$ *существует и для определённости минор* $\Delta$ *матрицы* $M$, *образованный из первых* $m$ *строк, отличен от нуля. Тогда*

$$B^{-1}z(x) = (W-E)^{-1}z'\left(\frac{1}{2} - x\right) -$$

$$-\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\left((W-E)^{-1}z'\left(\frac{1}{2}-x\right),\ \psi_j\right)\Delta_{jk}\ \tilde{\varphi}_k(x), \tag{0.4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B(0,\ t)B^{-1}z(t)dt = 0 \tag{0.5}$$

**Теорема 1.** *Для оператора* $B^{-1}$ *справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = -z'\left(\frac{1}{2} - x\right) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) +$$

$$+a_4(x)z\left(\frac{1}{2} - x\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t)dt \tag{0.6}$$

$$S\dot{z}(0) + T \cdot z\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{0.7}$$

*где* $a_i(x),\ i = \overline{1,4}, a_3'(x),\ a_4'(x)$, *непрерывные матрицы-функции, каждая компанента матрицы* $a(x,t)$ *имеет тот же смысл, что и компоненты* $Bx(x,t)$ *с той лишь разницей, что теперь по* $t$ *предполагается лишь непрерывность,* $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Во второй главе** рассмотрим интегро-дифференцируемую
систему для резольвенты
рассмотренного оператора

Рассмотрим систему

$$Q \cdot v'(x) + \tilde{P}_1(x)v(0) + \tilde{P}_2(x)v\left(\frac{1}{2}\right) +$$
$$+\tilde{P}_3(x)v(x) + \tilde{N}v - \lambda v(x) = \tilde{m}(x) \tag{0.8}$$
$$\tilde{M}_1 v(0) + \tilde{M}_0 v\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{0.9}$$

**Лемма 5.** *Неособой матрицей* $\Gamma$*, диагонализирующей матрицу* $Q^{-1}$*, то есть* $\Gamma^{-1} \cdot Q^{-1} \cdot \Gamma = D = diag(i, -i, i, -i)$*, является*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.** *Если* $R_\lambda$ *существует, то*

$$R_\lambda f(x) = \begin{cases} v_1(x), \ \text{при } x \in \left[0, \ \frac{1}{2}\right] \\ v_2\left(x - \frac{1}{2}\right), \ \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}, \ 1\right] \end{cases}, \tag{0.10}$$

*где* $v_i(x), i = 1, \ 2, \ ...$ *- первые две компаненты вектора* $v(x)$*, удовлетворяющего системе (7), (8). Верно и обратное, то есть, если* $\lambda$ *таково, что однородная краевая задача для системы (7), (8) имеет только нулевое решение, то* $R_\lambda$ *существует и определяется по формуле (9).*

**В третьей главе главе** рассмотрим теорему равносходимости для простейшего оператора с инволюцией, имеющей конечное число разрывов, имеющий вид

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} f(t)dt, \text{ действующий в } L_2[0,1].$$

$$\theta(x) = \frac{2k-1}{n} - x \text{ при } x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k = \overline{1, n-1}.$$

Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е.

$$\theta(\theta(x)) \equiv x$$

и $\theta(x)$ имеет разрывы первого рода в точках $x = \frac{k}{n}$ и $k = \overline{1, n-1}$.

**Теорема 3.** *Если*

$$y = R_\lambda(A)f(x) = (E - \lambda A)^{-1}Af(x),$$

*то*

$$v'(x) = \lambda Bu(x) + B\Phi(x), \tag{0.11}$$

$$P_0 v(0) + P_1 v\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \tag{0.12}$$

*где*

$$v(x) = (v_1(x), ..., \ v_{2n}(x))^T, \ v_{2k-1}(x) = y\left(\frac{k-1}{n} + x\right),$$

$$v_{2k}(x) = y\left(\frac{k}{n} + x\right), \quad k = \overline{1, n};$$

$$\Phi(x) = (f_1(x), ..., f_{2n}(x))^T, \ f_{2k-1}(x) = f\left(\frac{k-1}{n} + x\right),$$

$$f_{2k}(x) = f\left(\frac{k}{n} + x\right), k = \overline{1, n}, \ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

*Матрица* $B = (2n \times 2n)$ *имеет на главной диагонали блоки* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *остальные элементы - нули.*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$
P_0 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

**Теорема 4.** *Если $v(x)$ удовлетворяет системе (10), (11) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и*

$$
R_\lambda(A)f(x) = \left\{ v_{2k-1}\left(x - \frac{k-1}{n}\right),\ x \in \left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right],\ k = \overline{1,\ n} \right\}.
$$

**Лемма 6.** *Собственными значениями матрицы $B$ являются $\lambda_{2k+1} = i$, $\lambda_{2k} = -i,\ k = \overline{1,\ n}$.*

**Лемма 7.** *Не особой матрицей $\Gamma$, диагонализирующей матрицу $B$, то есть*

$$
\Gamma^{-1} \cdot B \cdot \Gamma = D = diag(i,\ -i,\ \cdots,\ i,\ -i),
$$

*является матрица, у которой на главной диагонали стоят блоки $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$, остальные элементы равны нулю. $\Gamma^{-1}$ имеет ту же структуру, только на главной диагонали блоки $\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.*

**Теорема 5.** *Если $v(x)$ удовлетворяет теореме 3, то $h(x) = \Gamma^{-1} \cdot v(x)$ удовлетворяет системе*

$$
h'(x) = \lambda D h(x) + \Gamma^{-1} \cdot B \cdot \Phi(x), \tag{0.13}
$$

$$
u(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 \Gamma h(\frac{1}{n}) = 0, \tag{0.14}
$$

*где матрица* $\Gamma^{-1}B$ *имеет на главной диагонали блоки* $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, *остальные элементы равны нулю.*

$$P_0 \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & i & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & i & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & i & i \end{pmatrix};$$

$$P_1 \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -i & -i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 8.** *Вектор-функция*

$$g_\lambda Q(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} g(x,\ t,\ \lambda) Q(t) dt$$

*является решение системы (12).*

**Лемма 9.** *Имеет место оценка*

$$\|g_\lambda Q(x)\|_\infty = O(\|f\|_1). \tag{0.15}$$

**Лемма 10.** *Справедлива оценка*

$$||g_\lambda \chi(x)||_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{0.16}$$

*компоненты вектор-функции $\chi(x)$ является характеристическими функциями отрезка $[0,\ \frac{1}{n}]$.*

**Лемма 11.** *Для решения $h(X,\ \lambda)$ задачи (12), (13) имеет место формула*

$$h(x,\ \lambda) = -Y(x,\ \lambda) \cdot \Delta^{-1}(\lambda) \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} u_x(g(x,\ t,\ \lambda)) \cdot Q(t)dt + g_\lambda Q(x), \quad (0.17)$$

*где*

$$Y(x,\ \lambda) = diag(e^{\lambda ix},\ e^{-\lambda ix}, \cdots,\ e^{\lambda ix},\ e^{-\lambda ix})$$

*- матрица размерности $2n \times 2n$, $\Delta(\lambda) = u(Y(x,\ \lambda)),\ u_x(\cdot)$ означает, что $u(\cdot)$ применяется по переменной $x$;*

$$g(x,t,\lambda) = diag(g_1(x,t,\lambda),\ \cdots,\ g_{2n}(x,t,\lambda)),$$

$$g_{2k+1}(x,t,\lambda) = -\varepsilon(t,x)e^{\lambda i(x-t)}$$

$$g_{2k}(x,t,\lambda) = \varepsilon(t,x)e^{-\lambda i(x-t)},\ k = \overline{1,n},$$

*Здесь $\varepsilon(x,t) = 1$ при $t \leq x$ и $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$;*

$$Q(x) = \Gamma^{-1}B\Phi(x)$$

**Лемма 12.**

$$det\Delta(\lambda) = (ie^{\frac{\lambda}{n}i} + ie^{-\frac{\lambda}{n}i})^n.$$

**Лемма 13.** *В $S_\delta$ справедлива оценка $|det\Delta(\lambda)| \geqslant C \cdot |e^{\lambda i}|$, где $C$ зависит только от $\delta$.*

**Лемма 14.** *Если $\varepsilon \in (0,\ \frac{1}{2n})$, то в $S_\delta$*

$$\left\|Y(x,\lambda) \cdot \Delta^{-1}(\lambda)\right\|_{C[\varepsilon,\ \frac{1}{n}-\varepsilon]} = O(e^{-\varepsilon Re\lambda i}).$$

**Лемма 15.** *Если $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2n})$, то для любой $f(x) \in L[0,1]$ в $S_\delta$*

$$\lim_{z\to\infty} \left\| \int_{|\lambda|=\varepsilon} [h(x,\lambda) - u(x,\lambda)]d\lambda \right\|_{C[\varepsilon, \frac{1}{n}-\varepsilon]} = 0,$$

*где $u(x,\lambda)$, удовлетворяет задаче*

$$u'(x) = \lambda Du(x) + Q(x),$$

$$u_0(x) = u(0) - u\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \quad (0.18)$$

**Теорема 6.** *(Теорема "равносходимости"). Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2n})$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \max_{\varepsilon + \frac{k-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k}{n} - \varepsilon} |S_r(x,f) - \sigma_2(x,f_k)| \right\} = 0,$$

*где $S_r(x,f)$ - частная сумма ряда Фурье по собственным и присоединённым функциям оператора $A$ для тех характеристических чисел $\lambda_k$, для которых $|\lambda_k| < r$;*

*$\sigma_2(x,g)$ - частная сумма ряда Фурье по системе*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} exp 2nk\pi ix \right\}$$

*функция $g(x)$ на отрезке $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$; $f_k(x) = f\left(\dfrac{k-1}{n} + x\right)$, $k = \overline{1,n}$ при $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.*

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе, основанной на материалах [5], [21] рассматривался интегральный оператор с инволюцией, имеющей разрывы. Во второй главе в рассмотрение ввелось понятие резольвенты данного оператора. Основным результатом работы является теорема о равносходимости для простейшего оператора с инволюцией, имеющей конечное число разрывов. Данная теорема была доказана с помощью ряда вспомогательных лемм.