Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Решение задачи естественной конвекции в сильном магнитном поле интегральным методом

Автореферат
Бакалаврская работа

студента (ки) 4 курса 413 группы
направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математический факультет

Юдкина Александра Сергеевича

Научный руководитель
ассистент ________________ В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав.каф., д.ф.м.н. ________________ Ю. А. Блинков

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Представленная квалификационная работа посвящена решению задачи о естественной конвекции в сильном магнитном поле опираясь на интегральный метод. Данный метод хорош тем, что он позволяет получать более точные результаты расчета влияния факторов по сравнению с методом цепных подстановок, индексным методом, методами абсолютных и относительных разниц, а также по сравнению с другими методами.

1 Общая структура работы

1.1 Актуальность работы

Теория пограничного слоя занимает одно из важнейших мест в современной механике. Само понятие пограничного слоя было введено Л. Прандтлем в 1904 году. Такая физическая модель позволяет разделить поток на две области: тонкий вязкий пограничный слой и область невязкого течения.

В настоящее время исследования явлений, связанных с пограничным слоем, сохраняют свою актуальность. В частности, такие задачи постоянно возникают в авиации при изучении обтекания крыла. Что же касается конвекции, то и в этой области появляется множество научных работ. Среди посвященных этой теме публикации, вышедших в начале XX века, можно назвать статьи Смирнова и Мадеры, где выполняется математическое моделирование конвекции у вертикальной пластины. В статье Кузьмина исследуется теплообмен и трение при свободной конвекции. Проблемой конвекции жидкости, в том числе наножидкости, занимаются и зарубежные ученые: Чандран, Хан, Юхаттачарья, Дас, Халид, и другие. Многие атмосферные и космические явления основаны на конвекции, что придает особую важность её изучению.

1.2 Цели и задачи работы

Цель работы заключается в исследовании движения жидкости, которая возникает при естественной конвекции, кроме того на жидкость наложено магнитное поле.

В данной работе будут представлены основные определения, понятия и теоремы, которые позволят составить и решить поставленную задачу, решение которой состоит из двух частей: аналитической и численной. Для реализации численного метода будет написана программа, которая будет выдавать результаты решения.

1.3 Практическая значимость работы

Полученные в работе теоретические результаты укажут какова теплоотдача и напряжение трения на пластине. Более того, написанная программа позволяет в общем случае рассматривать любую задачу.

Содержание выпускной квалификационной работы

1.4 Уравнения движения электропроводной жидкости во внешнем магнитном поле при естественной конвекции

Пусть пространство заполнено вязкой электропроводной несжимаемой жидкостью. Температура жидкости постоянна и равна T_∞.

В эту жидкость помещена вертикальная пластина с температурой T_ω, большей чем T_∞. Тогда под действием разности температур возникает естественная конвекция жидкости. Кроме того на движение жидкости будет влиять наложенное магнитное поле. Для составления уравнения введем систему координат, направив ось x по вертикали вверх, а ось y перпендикулярно пластине. Вдоль оси z пластина будет считаться безграничной, поэтому от координаты z решение зависеть не будет.

Схема течения приведена в соответствии с рисунком 2.1.

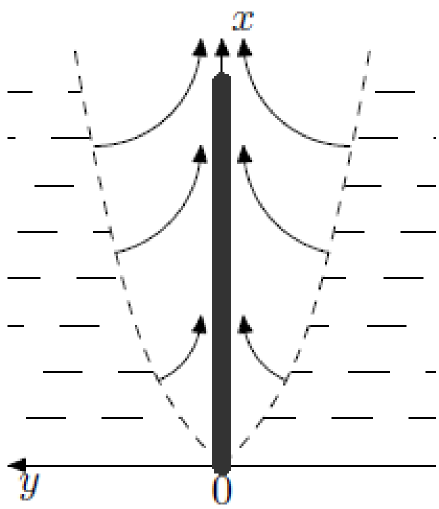

Рисунок 1.1: Пластина с прилегающим к ней слоем конвекции

Так как разность температур приводит к появлению разности плотности, то к активным силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу:

$$g(T - T_\infty)\beta\nu, \quad \text{где} \;\; \nu = \frac{T - T_\infty}{T_\omega - T_\infty}.$$

Тогда уравнение движения электропроводной несжимаемой жидкости в пограничном слое во внешнем магнитном поле, при условии, что магнитное число Рейнольдса мало, примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\left(T_\omega - T_\infty\right)\beta\nu - \dfrac{\delta^2 B^2 u}{\rho}; \\ \rho c\left(u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + v\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \delta B^2 u^2; \end{cases} \tag{1.1}$$

1.5 Граничные условия

Систему следует решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} y = 0: \quad u = v = 0, \quad T = T_\omega, \\ y \to \infty: \quad u = 0, \quad T = T_\infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Первое условие означает прилипание жидкости к пластине и условие того, что температура части жидкости, прилегающей к пластине, равна температуре пластины.

Второе условие означает, что на бесконечности движение жидкости затухает, вследствие того, что температура частиц жидкости при удалении от пластины стремится к T_∞ и архимедова подъемная сила исчезает.

1.6 Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных

Уравнение системы запишем в безразмерных переменных, полагая

$$u = \hat{u}U \; x = \hat{x}\iota \; B = \hat{B}B_0$$

$$\upsilon = \hat{\upsilon}V \; y = \hat{y}\delta \; T = T_\infty + \hat{t}(\Delta T_0) \tag{1.3}$$

из всех введенных величин вместе с постановкой задачи даются ΔT_0 и ι, остальные величины должны быть определенны из сравнения порядка членов.

1.7 Внешнее разложение

Система содержит параметр η поэтому решение системы будет зависеть от этого параметра. Мы будем искать решение системы при условии что $\eta >> 1$.

Тогда решение можно искать методом разложения по малому параметру:

$$\xi = (\eta^{-1}\rho_r)^{1/2}$$

То, что необходимо ввести таким образом будет ясно из дальнейшего. Поэтому искомые функции $\hat{u}$, $\hat{\nu}$, $\hat{t}$ можно ввести таким образом:

$$\hat{u} = u_0 + \xi u_1 + \xi^2 u_2 + ...$$

$$\hat{\nu} = \nu_0 + \xi \nu_1 + \xi^2 \nu_2 + ...$$

$$\hat{t} = t_0 + \xi t_1 + \xi^2 t_2 + ... \tag{1.4}$$

где u_i, ν_i, t_i - коэффициент разложения для u, ν, t зависящие от $\hat{x}$ и $\hat{y}$.

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать решение задачи только в безразмерных переменных, то чёрточки над безразмерными величинами в дальнейшем будут опущены. Там где встретим размерные величины, они будут специально оговорены.

1.8 Численное решение задачи в случае степенного распределения температуры пластины и напряженности магнитного поля.

Для того чтобы оценить точность интегрального метода рассмотрим случай, когда температура и напряженность магнитного поля распределены по степенному закону. В этом случае решение задачи становится автомодельным и для этого случая построено численное решение в бакалаврской работе Спылихина.

$$t_\omega = x^n; \quad B = x^m. \tag{1.5}$$

причем

$$m = \frac{n-1}{4}.$$

Подставляя (1.5) в $\delta \frac{d}{dx}\left(t_\omega^2 B^{-2}\delta\right) = 10t_\omega + bB{-}2t\omega\delta^2$ получим, что:

$$f(x) = \frac{2x^{\frac{5n+3}{2}}}{5n+3}. \tag{1.6}$$

Зная $f(x)$ определим δ, подставив (1.5)

$$\delta = 2\sqrt{5}\left(\frac{2}{5n+3}\right)^{1/2} x^{-\frac{n-1}{4}}.$$

Теперь мы можем определить производную

$$\left.\frac{\partial t_0}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left(\frac{5n+3}{10}\right)^{1/2} x^{\frac{5n-1}{4}}. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) определяет производную t_0 на поверхности пластины, которая используется для определения теплоотдачи пластины. Эта же величина в автомодельном решении определяется по формуле:

$$\left.\frac{\partial t_0}{\partial y}\right|_{y=0} = x^{\frac{5n-1}{4}} \frac{(n+3)^{1/2}}{2} \left.\frac{df_0}{d\eta}\right|_{\eta=0}, \tag{1.8}$$

где $f_0(\eta)$ определена с помощью численного интегрирования в бакалаврской работе Спылихина.

1.9 Результаты расчётов

В соответствии с рисунками 2.2, 2.3, 2.4 представлены графики изменения $\left.\frac{\partial t_0}{\partial y}\right|_{y=0}$ в зависимости от x для случая, когда температура пластины постоянна, а напряженность магнитного поля изменяется по линейному закону.

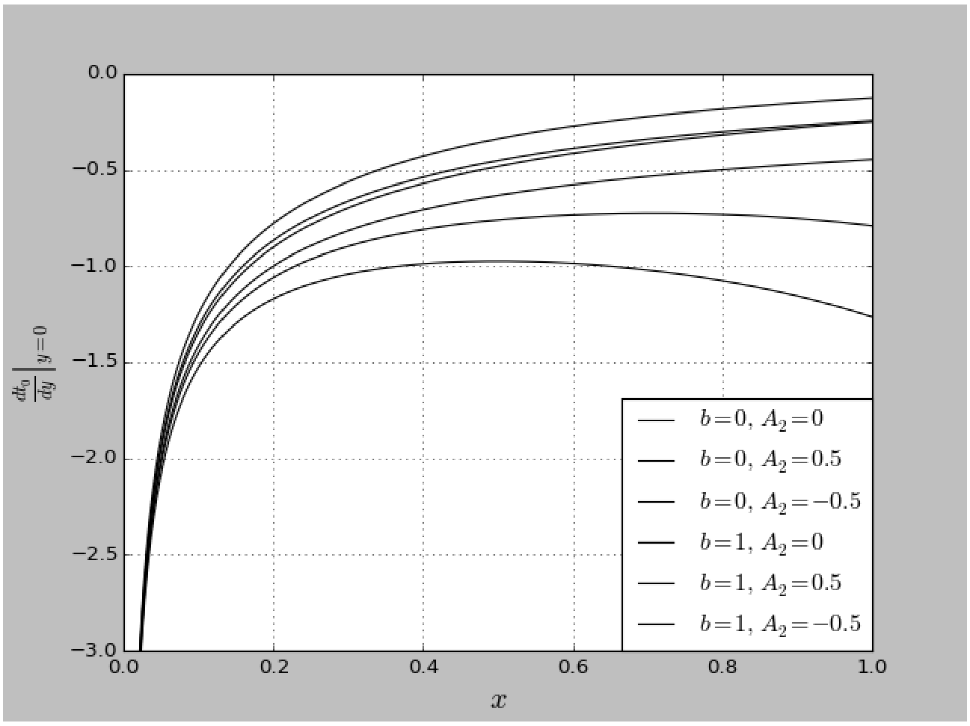

Рисунок 1.2: графики изменения $\left.\frac{\partial t_0}{\partial y}\right|_{y=0}$ при $A = 0$

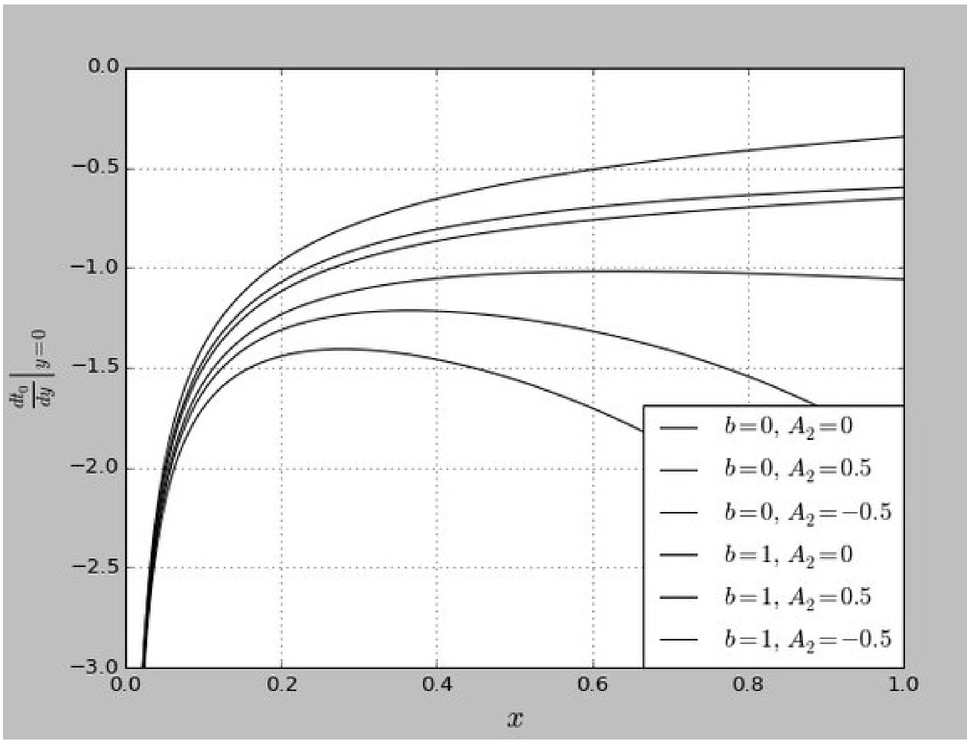

Рисунок 1.3: графики изменения $\frac{\partial t_0}{\partial y}\Big|_{y=0}$ при $A = 0.5$

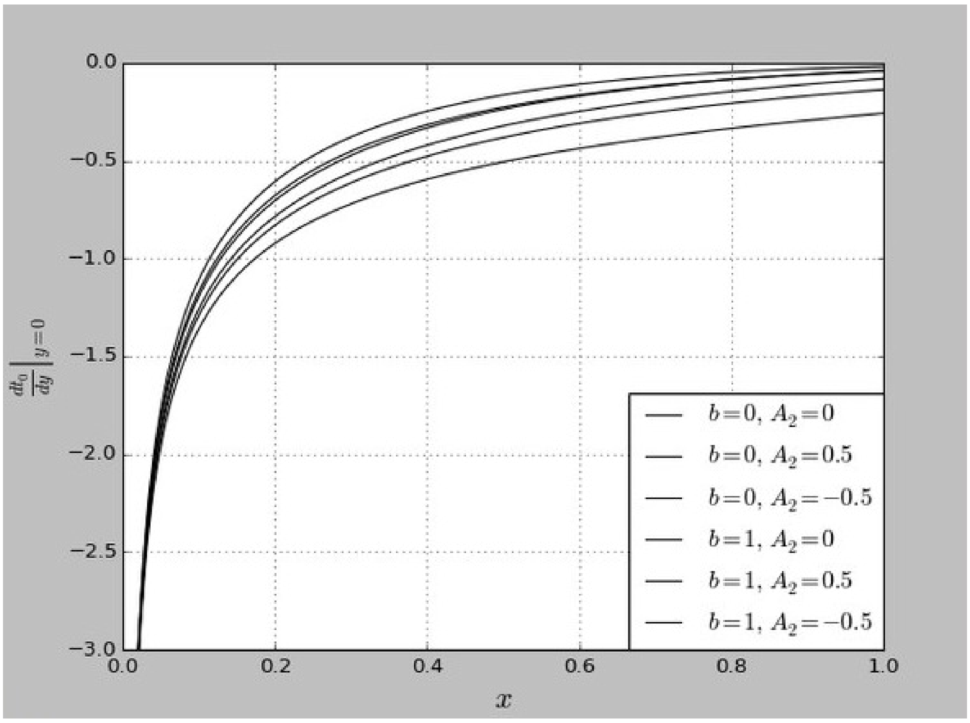

Рисунок 1.4: графики изменения $\frac{\partial t_0}{\partial y}\Big|_{y=0}$ при $A = -0.5$

График I – Соответствует постоянному напряжению магнитного поля, $A_2 = 0$;

График II – Соответствует случаю $A_2 = 0.5$ и следовательно напряженность магнитного поля растет с увеличением x.

График III – Соответствует случаю $A_2 = -0.5$.

Причем для всех трех первых графиков $b = 0$.

График IV – соответствует случаю $A_2 = 0$;

График V – соответствует случаю $A_2 = 0.5$;

График VI – соответствует случаю $A_2 = -0.5$;

Для всех трех этих графиков $b = 1$.

Если величина b отлична от нуля, то это значит, что в уравнении энергии учитывается тепло выделяющееся в следствие трения и джоулово тепло.

Из анализа графиков изображенных на рисунке 2.2 видно, что в случае постоянной напряженности магнитного поля, теплоотдача уменьшается с увеличением x вдоль пластины. Если напряженность магнитного поля уменьшается вдоль пластины, то поток тепла будет большим, чем при постоянном напряжении магнитного поля и с увеличением x вначале убывает, а затем возрастает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была поставлена, рассмотрена и решена задача о естественной конвекции в сильном магнитном поле. В начале была выписана система уравнений в размерных переменных. Далее эта система была преобразована к безразмерному. Далее было обнаружено, что для системы уравнений нужно построить решение интегральным методом. Для внутренней области аналитическим путем были получены первые три разложения, а так же выведены граничные условия для внешнего разложения. В конце работы с использование полученного внутреннего разложения были выведены формулы для теплоотдачи и напряжения трения на пластине. Была установлена зависимость, этих величин от параметров задачи, таких как число Прандля, напряженность магнитного поля, электропроводность жидкости.