Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКО-УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Автореферат бакалаврской работы

студента 4 курса 413 группы
направление 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Берестовой Кирилл Александрович

Научный руководитель
зав.каф., д.ф.-м.н. ____________ Ю.А. Блинков

Зав. кафедрой
д.ф. – м. н. ____________ Ю.А. Блинков

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных продольных волн деформаций в цилиндрической оболочке. Содержащих вязкую несжимаемую жидкость внутри оболочки. Физические свойства оболочки определяются уравнениями линейной квадратичной теории вязкоупругости.

Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейных тонкостенных конструкциях, в том числе цилиндрических оболочках, без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассмотрены ранее с позиции теории солитонов.

Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

В первом разделе построены математические модели, описывающие поведение волны деформаций в цилиндрической оболочке, содержащей несжимаемую вязкую жидкость, в виде нелинейных уравнений в частных производных, которые обобщают уравнения КдВБ и МКдВБ, содержащих члены, учитывающие наличие жидкости.

В начале записаны уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Лява и получены формулы поверхностных напряжений со стороны слоя жидкости. Затем записываются и решаются уравнения динамики оболочки и уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Выведено уравнение динамики с учетом наличия жидкости внутри оболочки. Введены безразмерные переменные и выделены малые параметры задачи. Выведено основное уравнение, описывающее волну деформаций в оболочке, содержащую несжимаемую вязкую жидкость, и записаны полученные аналитически решения этих уравнений для различных частных случаев.

Во втором разделе получены точные решения для некоторых наборов параметров входящих в исследуемое уравнение, а также выведены некоторые аналитические свойства.

В третьем разделе с помощью техники базисов Грёбнера сгенерированы разностные схемы для численного исследования моделей для двух оболочек, полученных в предыдущих главах.

Изложены общие концепции применяемой техники базисов Грёбнера. Построены разностные схемы для уравнений КдВБ, МКдВБ и проведено численное исследование построенной в первом разделе математической модели с начальным условием в виде точного решения, с использованием комплекса программ, разработанных на основе разностной схемы для различного набора параметров, построенных в первом и втором разделах.

Также приведено описание разработанного на их основе программного комплекса.

1 Построение математической модели

Получим уравнения динамики с учётом наличия вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической оболочке с помощью асимптотических методов для решения связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрим бесконечно длинную вязкоупругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{1}{2}V^2 + \mathrm{rot}\bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} grad \cdot p = -\nu \,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\bar{V},\\ div\bar{V} = 0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t},\ V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_1 - W. \tag{1.2}$$

Здесь t – время; V_r, V_x – проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости; U – продольное упругое перемещение оболочек по оси x; W – прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; R_1 – внутренний радиус оболочки.

В случае осевой симметрии используя гипотезу Кирхгофа-Лява, имеем связь между компонентами деформаций ε_x , ε_y перемещений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x})^2, \varepsilon_y = -\frac{1}{R}W, \tag{1.3}$$

где R – радиус срединой поверхности оболочки, z – расстояние от нее. Связь между компонентами напряжений σ_x, σ_y и деформаций зададим уравнениями квадратичной теории вязкоупругости учитывающей линейную упругость объёмных деформаций

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) - \frac{E}{1+\mu_0}\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}(1+a\varepsilon_u^2)e_x d\tau,$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) - \frac{E}{1+\mu_0}\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}(1+a\varepsilon_u^2)e_y d\tau. \tag{1.4}$$

Здесь E – модуль Юнга, μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочек (считая их одинаковыми), t – время; α, β, ρ – параметры вязкоупругости; ε_u^2 –квадрат интенсивности деформаций, e_x, e_y – компоненты девиатора деформаций

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y); \quad e_x = \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y, \quad e_y = \frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x. \tag{1.5}$$

Разлагая функции $(1+a\varepsilon_u^2)e_x, (1+a\varepsilon_u^2)e_y$ в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$, при условии $\beta t \gg 1$ сохраняем два члена разложения их формул (1.4) получим приближенные уравнения состояния

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) + p[\frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y + a(\overset{2}{e_u} e_x)],$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) + p[\frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x + a(\overset{2}{\varepsilon_u} e_y)] \tag{1.6}$$

где введен оператор р, такой, что

$$pf = \frac{E}{1+\mu_0}(\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}f) \tag{1.7}$$

Вычисляя усилия и моменты по формулам

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, N_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y dz, M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz, M_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_{yz} z dz \tag{1.8}$$

и подставим (1.8) в систему уравнений динамических оболочек

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - p_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R}N_y + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial W}{\partial x}N_x) - p_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -q_n \tag{1.9}$$

здесь h_0 – толщина оболочки; q_x, q_n напряжения, действующие со стороны жидкости на поверхность оболочки, снесенные на невозмущаемую поверхность оболочки $(W \ll R)$

$$q_x = [\rho\nu(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x})]_{r=R}, q_n = [-\rho + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}]_{r=R} \tag{1.10}$$

Принимая за характерную длину – длину волны деформации l, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений динамики оболочек (1.3)-(1.9)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0\left(1-\mu_0^2\right)}}. \tag{1.11}$$

здесь c_0– скорость звука в материале оболочки

Положим

$$\begin{array}{llll} \dfrac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), & \dfrac{w_m}{R} = O(\varepsilon), & a = O(\varepsilon^{-1}), & \dfrac{\alpha}{\beta} = O(1), \\ \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{C_0}{l} = O(\varepsilon), & \dfrac{R}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), & \dfrac{h_0}{R} = O(\varepsilon), & \end{array} \tag{1.12}$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр в задачи(1.9).

Применим метод двухмасштабных разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \tag{1.13}$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру ε:

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \tag{1.14}$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi \approx 0$ – гидравлическая теория смазки), считая $(\psi)\left(R_1 c_0/\nu\right) \ll 1$ (– ползущие течения), и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*}=0,\quad \frac{\partial P^0}{\partial x}=\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}),\quad \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^*v_r^0)+\frac{\partial v_x^0}{\partial x^*}=0 \tag{1.15}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered} r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}=0,\quad r^*\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*}=0 \ \text{ при } \ r^*=0,\\ v_r^0=-\frac{\partial u_{30}}{\partial t^*},\quad v_x^0=\frac{U_mR_1}{W_ml}\frac{\partial U_{10}}{\partial t^*} \ \text{ при } \ r^*=1. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Из решения задачи (1.15), (1.16) следует, что правой части уравнения остается выражение

$$2\frac{\rho l\nu}{\rho_0h_0R_1c_0\varepsilon}[1-(2\mu_1\frac{R}{R_1})^2]\frac{\partial U_{10}}{\partial\xi} \tag{1.17}$$

с принятой точностью по ψ,ε положим

$$R_1\approx R$$

Подставляя (1.17) в уравнение (1.9), окончательно получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{c}{2}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2u_{10}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\varepsilon}(\frac{R}{l})^2{\mu_1}^2\frac{c}{2}\frac{\partial^4u_{10}}{\partial\xi^4}-\\ -\frac{2}{3}\frac{a}{\varepsilon}(\frac{u_m}{l})^2(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}\frac{1+{\mu_1}^4+(1+\mu_1)^4}{c}(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi})^2\frac{\partial^2u_{10}}{\partial\xi^2}-\\ -\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{c_0}{l\varepsilon}(1-\mu_0)(1+\mu_1+{\mu_1}^2)\frac{\partial^3u_{10}}{\partial\xi^3}-\\ 2[1-(2\mu_1)^2]\frac{\rho l\nu}{\rho_0h_0R_1c_0\varepsilon}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=0.\end{gathered} \tag{1.18}$$

Легко видеть, что замена $\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=C_3\varphi,\quad \eta=c_1\xi,\quad t=c_2\tau$ позволяет записать уравнение (1.18) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}-6\sigma_1\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\sigma_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\sigma\varphi=0. \tag{1.19}$$

здесь $\sigma=1$ при $\mu_1<\frac{1}{2}$, $\sigma=-1$ при $\mu_1>\frac{1}{2}$ и $\sigma=0$ при $\mu_1=\frac{1}{2}$.

2 Точные решения и некоторые аналитические оценки

При $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$ и $\sigma = 0$ уравнение (1.19) переходит в уравнение Кортевега–де Вриза, которое имеет следующее точное решение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + 6\frac{\partial}{\partial x}\varphi\varphi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\theta = \kappa x - \omega t \\ &\varphi = \frac{\omega}{6\kappa} + \frac{4}{3}\kappa^2 - 2\kappa^2 \tanh^2(\theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

При $\sigma_1 = 0$ и $\sigma = 0$ уравнение переходит в уравнение Кортевега–де Вриза Бюргерса, которое имеет следующие точные решения

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + 6\frac{\partial}{\partial x}\varphi\varphi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\theta = \frac{1}{10}\sigma_2 x - \omega t \\ &\varphi = \frac{5}{3}\frac{\omega}{\sigma_2} + \frac{1}{50}\sigma_2^2 - \frac{1}{25}\sigma_2^2 \tanh(\theta) - \frac{1}{50}\sigma_2^2 \tanh^2(\theta) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &\theta = -\frac{1}{10}\sigma_2 x - \omega t \\ &\varphi = -\frac{5}{3}\frac{\omega}{\sigma_2} + \frac{1}{50}\sigma_2^2 + \frac{1}{25}\sigma_2^2 \tanh(\theta) - \frac{1}{50}\sigma_2^2 \tanh^2(\theta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

При $\sigma = 0$ уравнение (1.19) имеет следующее точное решение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + 6\frac{\partial}{\partial x}\varphi\varphi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi - \sigma_1\varphi^2\frac{\partial}{\partial x}\varphi - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0 \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &\theta = \kappa x + t\left(-9\frac{\kappa}{\sigma_1} + \frac{1}{6}\kappa\sigma_2^2 + 2\kappa^3\right) \\ &\varphi = \frac{3}{\sigma_1} \pm \frac{\sigma_2\sqrt{6}}{6\sqrt{\sigma_1}} \pm \frac{\kappa\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_1}}\tanh(\theta) \end{aligned} \tag{2.7}$$

При $\sigma = 0$ и $\sigma_1 = 54/\sigma_2^2$ уравнение переходит в следующее, которое имеет точное решение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + 6\frac{\partial}{\partial x}\varphi\,\varphi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi - \frac{54}{\sigma_2^2}\varphi^2\frac{\partial}{\partial x}\varphi - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0 \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\theta = \kappa x + 2t\kappa^3 \\ \varphi = -\frac{1}{3}\kappa\sigma_2\tanh(\theta)\end{gathered} \tag{2.9}$$

При $\sigma = 0$ уравнение имеет следующее точное решение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi - \sigma_1\varphi^2\frac{\partial}{\partial x}\varphi - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0 \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}\theta = \kappa x + t\left(\frac{1}{6}\kappa\sigma_2^2 + 2\kappa^3\right) \\ \varphi = \pm\frac{\kappa\sqrt{6}\tanh(\theta)}{\sqrt{\sigma_1}} \pm \frac{\sigma_2\sqrt{6}}{6\sqrt{\sigma_1}}\end{gathered} \tag{2.11}$$

Эти точные решения будут использованы для проверки разностных схем, которые будут получены в разделе 3.

3 Компьтерное моделирование

Запишем уравнение (1.19) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} (-3\sigma_0\varphi^2 - \varphi_{\eta\eta} + 2\sigma_1\varphi^3 + 2\sigma_2\varphi_\eta \, dt + \sigma\varphi \, d\eta - \iint_{\Omega} \sigma\varphi \, dt \, d\eta = 0 \qquad (3.1)$$

для любой области Ω. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$.

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_\eta \, d\eta &= u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta} \, d\eta &= u_\eta(t, \eta_{j+1}) - u_\eta(t, \eta_j). \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (3.1),(3.2) в виде в виде разностной схемы для уравнения (1.19), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{({u^2}_{j+1}^{n+1} - {u^2}_{j-1}^{n+1}) + ({u^2}_{j+1}^{n} - {u^2}_{j-1}^{n})}{4h} + \\ &\quad + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^{n} - 2u_{j+1}^{n} + 2u_{j-1}^{n} - u_{j-2}^{n})}{4h^3} - \\ &\qquad - 2\sigma_1 \frac{({u^3}_{j+1}^{n+1} - {u^3}_{j-1}^{n+1}) + ({u^3}_{j+1}^{n} - {u^3}_{j-1}^{n})}{4h} + \\ &\qquad - \sigma_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n})}{2h^2} - \\ &\qquad\qquad - \sigma \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное моделирование с использованием компьютерной алгебры позволило выявить особенности поведения волн деформаций в физически нелинейной упругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка по пространственной переменной, позволило получить результат расчета без осцилляций вызываемых численной реализацией. Численная схема также была протестирована на на многих точных решений при разных параметрах.

Полученный расчет показал влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в оболочке в зависимости от величины, характеризующей материал оболочки – коэффициента Пуассона:

- рост амплитуды волны для неорганических материалов,
- падения амплитуды волны для живых организмов,
- отсутствие влияния жидкости для несжимаемых материалов, таких как резина.

Следует отметить, что все результаты справедливы для оболочки очень малого радиуса, а частности для мелких кровеносных сосудов.