Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Ивлиева Алексея Романовича

Научный руководитель
к. э. н. ______________ А. В. Харламов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Ценообразование является одним из ключевых элементов экономики. Воздействие процессов ценообразования на социально-экономическую ситуацию неоспоримо. С другой стороны, цены на товары и услуги формируются под воздействием множества факторов. Поэтому анализ и прогнозирование развития рынка невозможны без исследования динамики цен.

Методы экономико-математического моделирования позволяют не только оценить и спрогнозировать экономическую ситуацию, но так же выявить факторы, влияющие на динамику цен, и подобрать инструменты для её регулирования.Все многообразие факторов, которые воздействуют на изучаемый процесс, можно разделить на две группы: главные (определяющие уровень изучаемого процесса) и второстепенные. Последние часто имеют случайный характер, определяя специфические и индивидуальные особенности каждого объекта исследования.

Взаимодействие главных и второстепенных факторов и определяет колеблемость исследуемого процесса. В этом взаимодействии синтезируется как необходимое, типическое, определяющее закономерность изучаемого явления, так и случайное, характеризующее отклонение от этой закономерности. Случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому закономерному явлению.

Для достоверного отображения объективно существующих в экономике процессов необходимо выявить существенные взаимосвязи и не только выявить, но и дать им количественную оценку. Этот подход требует вскрытия причинных зависимостей. Под причинной зависимостью понимается такая связь между процессами, когда изменение одного из них является следствием изменения другого [1].

Не все факторы, влияющие на экономические процессы, являются случайными величинами. Поэтому при анализе экономических явлений обычно рассматриваются связи между случайными и неслучайными величинами. Такие связи называются регрессионными, а метод математической статистики, их изучающий, называется регрессионным анализом.

Наличие множества исходных признаков, характеризующих процесс функционирования объектов, заставляет отбирать из них наиболее существенные и изучать меньший набор показателей. Чаще исходные признаки подвергаются некоторому преобразованию, которое обеспечивает минимальную потерю информации. Сжатие информации получается за счет того, что число главных компонент - новых единиц измерения - используется значительно меньше, чем было исходных признаков.

В этой работы мы рассмотрим регрессионный анализ.

Цель данной работы заключается в построении комплекса экономико-математических моделей ценообразования рынка недвижимости и анализ их коэффициентов. В соответствии с целью поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Раскрыть понятие модели множественной линейной регрессии и изучить её спецификации и тестирование гипотез.
2. Рассмотреть особенности оценивания модели и его проблемы: мультиколлинеарность, гетероскедастичность.
3. Собрать эмпирический материал, построить и оценить модели, проанализировать динамику коэффициентов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Бакалаврская работа состоит из следующего: введения; раздела с определениями и понятиями; основной части; заключения; приложения и списка используемых литературных источников. Основная часть работы состоит из трёх разделов, два из которых, в свою очередь, разделены на параграфы. В первом разделе основной части рассмотрено понятие регрессионой модели, её оценивание. Второй раздел состоит из двух параграфов, в которых говорится о проблемах, возникающих при оценивании регрессионной модели, а именно, мультиколлинеарности, которая описана в первом параграфе, и гетероскедастичности, которая описана во втором. Также во втором параграфе рассматриваются тесты на наличие в модели гетероскедастичности. В третьем разделе приведён практический пример построения комплекса регрессионных моделей ценнобразования на рынке недвижимости и их анализ с использованием программного обеспечения Gretl. Также сделаны выводы о динамике коэффициентов полученных моделей.

Введение содержит основные положения: акуальность темы исследования, цель и соответствующие ей задачи.

В первом разделе «Линейная модель множественной регрессии» раскрывается понятие регресии и содержатся необходимые выводы для оценки этой модели.

С целью математического описания конкретного вида зависимостей с использованием регрессионного анализа подбирают класс функций, связывающих результативный показатель y и аргументы $x_1, x_2, ..., x_k$, отбирают наиболее информативные аргументы, вычисляют оценки неизвестных значений параметров уравнения связи и анализируют точность полученного уравнения.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_k)$, описывающая зависимость условного среднего значения результативного признака y от заданных значений аргументов, называется функцией (уравнением) регрессии [2].

Задача регрессионного анализа состоит в построении модели, позволяющей по значениям независимых показателей получать оценки значений зависимой переменной. Регрессионный анализ является основным средством исследования зависимостей между социально-экономическими переменными.

Эта задача рассмотрена в рамках самой распространенной в статистических пакетах классической модели линейной регрессии. Первые математические результаты, связанные с регрессионным анализом, сделаны в предположении, что регрессионная ошибка распределена нормально с параметрами, ошибки для различных объектов считаются независимыми.

Для точного описания уравнения регрессии необходимо знать условный закон распределения результативного показателя y. В статистической практике такую информацию получить обычно не удается, поэтому ограничиваются поиском подходящих аппроксимаций для функции $f(x_1, x_2, ..., x_k)$, основанных на исходных статистических данных.

В общем виде многомерная линейная регрессионная модель зависимости y от объясняющих переменных $x_1, x_2, ..., x_k$ имеет вид:

$$\tilde{y} = M(y/x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k.$$

Для оценки неизвестных параметров β_i взята случайная выборка объема n из $(k+1)$ - мерной случайной величины $(y, x_1, x_2, ..., x_k)$ и $y_i, x_{i1}, ..., x_{ik}$ - результат i-го наблюдения, где $i = 1, 2, ..., n$.

Модель множественной собственно линейной регрессии можно представить для $i = 1, 2, ..., n$ в виде:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i,$$

где ε_i - взаимно некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 , т.е $M\varepsilon_i = 0; D\varepsilon_i = \sigma^2$. [2]

В матричной форме модель имеет вид [3]:

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец фактических значений зависимой переменной размерности n;

$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$ - матрица значений объясняющих переменных размерности $(n \times k+1)$, причем $n > k$;

$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$- вектор-столбец неизвестных параметров, подлежащих оценке, размерности $(k+1)$;

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец случайных ошибок размерности n с математическим ожиданием $M\varepsilon = 0$ и ковариационной матрицей $V(\varepsilon) = \sigma^2 E_n$, при этом $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$-единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Оценки неизвестных параметров β_j находятся методом наименьших квадратов, минимизируя скалярную сумму квадратов [4] $Q = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$ по компонентам вектора β [5], тогда

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} (X^T Y).$$

Далее доказывается несмещенность оценок метода наименьших квадратов.

Таким образом, оценка $\hat{\beta}_j$ коэффициента линейной регрессии - это линейная функция от зависимой переменной y. Она имеет нормальное распределение с математическим ожиданием β_j и дисперсией: $D_{\hat{\beta}_{j-1}} = \sigma^2[(X^TX)^{-1}]_{jj}$, где $[(X^TX)^{-1}]_{jj}$ - диагональный элемент обратной матрицы $(X^TX)^{-1}$, соответствующий j-й строке и j-му столбцу.

Для проверки гипотезы $H_0 : \beta = 0$ используется статистика:

$$F_{\text{набл}} = \frac{\frac{1}{k+1}Q_R}{\frac{1}{n-k-1}Q_{\text{ост}}},$$

где $Q_{\text{ост}} = (Y - X\hat{\beta})^T(Y - X\hat{\beta}) = e^Te = \sum_{i=1}^n e_i^2$ есть сумма квадратов отклонений результатов наблюдения от регрессии $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ и $Q_R = (X\hat{\beta})^T(X\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n \hat{y}^2$ есть сумма квадратов отклонений от нуля, обусловленных регрессией. Эта статистика имеет F-распределение Фишера-Снедекора с $(k+1)$ и $(n-k-1)$ степенями свободы. Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, то уравнение регрессии значимо, т.е. в уравнении есть хотя бы один коэффициент регрессии, отличный от нуля. В случае значимости уравнения регрессии проверяется значимость отдельных коэффициентов регрессии, представляет интерес построение интервальных оценок для значимых коэффициентов. Если уравнение регрессии незначимо, т.е. все коэффициенты уравнения регрессии для генеральной совокупности равны нулю, то на этом анализ уравнения регрессии заканчивается.

Для проверки незначимости отдельных коэффициентов регрессии, т.е. нулевой гипотезы $H_0 : \beta_j = 0$ используется величина t-критерия, основанная на статистике:

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{s}[(X^TX)^{-1}]_{jj}^{1/2}},$$

которая имеет t-распределение(распределение Стьюдента) с числом степеней свободы $(n - k - 1)$.

После нахождения коэффициентов регрессии необходимо построить доверительный интервал для значимых коэффициентов:

$$\beta_j \in \{\hat{\beta}_j \pm t_\gamma \hat{s}[(X^TX)^{-1}]_{jj}\}^{1/2}.$$

Во втором разделе «Особенности оценивания модели» рассматриваются проблемы, возникающие при оценивании модели, а именно мультиколлинеарность и гетероскедастичность.

В первом параграфе «Мультиколлинеарность» этого раздела раскрывается понятие мультиколлинеарности.

Одним из условий классической регрессионной модели является предположение о линейной независимости объясняющих переменных, что означает линейную независимость столбцов матрицы регрессоров X или (эквивалентно) что матрица $(X^TX)^{-1}$ имеет полный ранг k. При нарушении этого условия, т.е. когда один из столбцов матрицы X есть линейная комбинация остальных столбцов, говорят, что имеет место полная коллинеарность. В этой ситуации нельзя построить МНК-оценку параметра β, что формально следует из сингулярности матрицы X^TX и невозможности решить нормальные уравнения.

На практике часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда матрица X имеет полный ранг, но между регрессорами имеется высокая степень корреляции. Тогда говорят о наличии мультиколлинеарности. В этом случае МНК-оценка формально существует, но обладает «плохими» свойствами. Мультиколлинеарность может возникать в силу разных причин.

Во втором параграфе «Гетероскедастичность» второго раздела рассматривается частный случай обобщенной регрессионной модели, а именно, модель с гетероскедастичностью и её оценивание. Это означает, что ошибки некоррелированы, но имеют непостоянные дисперсии. А так же описаны тесты на наличие в модели гетероскедастичности.

В **методе взвешенных наименьших квадратов** предполагается, что ковариационная матрица Ω вектора ошибок ϵ диагональна, $V(\varepsilon_t) = \sigma_t^2, t = 1, ..., n$. Используя обобщенный метод наименьших квадратов получаем,

$$f(b) = \sum_{t=1}^{n}(\frac{1}{\sigma_t}(y_t - \sum_{j=1}^{k} b_j x_{tj}))^2.$$

В **коррекции на гетероскедастичность** предполагается, что числа σ_t неизвестны, и тогда необходимо использовать доступный обобщенный метод наименьших квадратов, который требует оценивания дисперсий σ_t^2. Так как число этих параметров равно n, то без дополнительных ограничений на структуру матрицы Ω нет надежды получить приемлемые оценки дисперсий. Здесь мы рассматривам несколько классов моделей с гетероскедастичностью, где такие ограничения накладываются и благодаря этому удается построить удовлетворительные оценки матрицы Ω, а следовательно, используя доступный обобщенный метод наименьших квадратов, и оценку β_{FGLS}.

В **стандартных ошибках в форме Уайта** предполагается, что Ω, матрица ковариаций вектора ошибок ε, диагональна, $V(\varepsilon_t) = \sigma_t^2, t = 1, ..., n$. Уайт показал, что

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = n(X'X)^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} e_s^2 x_s x_s')(X'X)^{-1}$$

является состоятельной оценкой матрицы ковариаций оценок коэффициентов регрессии.

Стандартные отклонения, рассчитанные по формуле выше, называются стандартными ошибками в форме Уайта или состоятельными стандартными ошибками при наличии гетероскедастичности.

Далее рассматриваются тесты на наличие в модели гетероскедастичности.

В **тесте Уайта (White)**описывается метод тестирования гипотезы $_0$ без каких-либо предположений относительно структуры гетероскедастичности. Сначала к исходной модели применяется обычный метод наименьших квадратов и находятся остатки регрессии $e_t, t = 1, ..., n$. Затем осуществляется регрессия квадратов этих остатков e_t^2 на все регрессоры X, их квадраты, попарные произведения и константу, если ее не было в составе исходных регрессоров. Тогда при гипотезе H_0 величина nR^2 асимптотически имеет распределение $\chi^2(N-1)$, где R^2 — коэффициент детерминации, а N — число регрессоров второй регрессии.

Тест Уайта является универсальным. Однако если гипотеза $_0$ отвергается, этот тест не дает указания на функциональную форму гетероскедастичности, и единственным способом коррекции на гетероскедастичность является применение стандартных ошибок в форме Уайта.

Тест Голдфелда-Куандта (Goldfeld-Quandt) применяется, как правило, когда есть предположение о прямой зависимости дисперсии ошибки от величины некоторой независимой переменной. Кратко тест можно описать следующим образом:

1. упорядочить данные по убыванию той независимой переменной, относительно которой есть подозрение на гетероскедастичность;
2. исключить d средних (в этом упорядочении) наблюдений (d должно быть примерно равно четверти общего количества наблюдений);
3. провести две независимые регрессии первых $\frac{n}{2} - \frac{d}{2}$ наблюдений и последних $\frac{n}{2} - \frac{d}{2}$ наблюдений и построить соответствующие остатки e_1 и e_2;
4. составить статистику $F = \frac{e_1' e_1}{e_2' e_2}$. Если верна гипотеза H_0, то F имеет распределение Фишера с $(\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - k, \frac{n}{2} - \frac{d}{2} - k)$ степенями свободы (числитель и знаменатель в выражении для F следует разделить на соответствующее число степеней свободы, но в данном случае они одинаковы).

Большая величина этой статистики означает, что гипотезу H_0 следует отвергнуть.

Тест Бреуша-Пагана (Breusch-Pagan) применяется в тех случаях, когда априорно предполагается, что дисперсии σ_t^2 зависят от некоторых дополнительных переменных:

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + z_t' \gamma, t = 1, ..., n,$$

где $z_t = (z_{t1}, ..., z_{tp})'$ — вектор (наблюдаемых) независимых переменных, γ_0, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_p)'$ — неизвестные параметры. В соответствии с тестом Бреуша-Пагана следует действовать так:

1. провести обычную регрессию и получить вектор остатков $e = (e_1, ..., e_n)'$;
2. построить оценку $\hat{\sigma}^2 = (\frac{1}{n}) \sum e_t^2$;
3. провести регрессию $\frac{e_t^2}{\hat{\sigma}^2} + \gamma_0 + z_t' \gamma + \nu_t$ и найти для нее объясненную часть вариации RSS;

4. построить статистику RSS/2. В работе Бреуша-Пагана установлено, что если верна гипотеза H_0 (отсутствие гетероскедастичности), то величина RSS/2 асимптотически имеет распределение $\chi^2(p)$.

При выявлении гетероскедастичности с помощью этого теста можно попытаться осуществить коррекцию с помощью метода взвешенных наименьших квадратов, выбирая в качестве весов величины $(\hat{\gamma}_0 + z_t'\hat{\gamma})^{\frac{-1}{2}}$, где $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}$ – оценки, полученные в п.3).

В третьем разделе «Построение и анализ модели рынка недвижимости» рассматривается динамика ценообразующих факторов и изменения модели стоимости на примере рынка однокомнатных квартир г.Саратова за период с 1999 по 2015 годы.

Анализ зависимости ценообразующих факторов от территориальных особенностей был подробно изучен ранее. Например, в публикации "Эконометрическое моделирование пространственных данных" [6]. В этой работе была поставлена задача провести изучить ценообразующие факторы в динамике.

В качестве эмпирического материала использовались данные вторичного рынка жилья, собранные на основе объявлений о продаже недвижимости [7]. Как правило, характеристики квартир, представленных в рекламных объявлениях, являются избыточными и не все они являются ценообразующими факторами по «мнению» рынка, в отличие от мнения продавцов. Тем не менее, существует достаточно устойчивый набор показателей, который указывается в объявлениях, представленных на сайтах и газетах: заявленная цена, местоположение (обычно адрес), общая площадь квартиры, жилая площадь (площадь комнаты), площадь кухни, этажность дома и этаж квартиры, материал дома (панельный, кирпичный, монолит, дерево), наличие балкона или лоджии, раздельный или совместный санузел, состояние квартиры (среднее, нормальное, хорошее, отличное), особенности планировки («сталинка», «чешка», «90-серия» и проч.). Также указывались дополнительные улучшения – решетки на окнах, металлическая дверь, стеклопакеты, евроремонт и некоторая экзотика. Конечно, в зависимости от времени показатели могут варьировать, также варьирует их значимость [8].

Рассмотрим регрессионную модель зависимости цен на квартире от следующих параметров:

Y – цена квартиры, тыс. р.; X_1 – общая площадь квартиры, м^2; X_2 – жилая площадь, м^2; X_3 – площадь кухни, м^2; X_4 – дополнительная площадь, м^2; X_5 – квартира на первом этаже; X_6 – квартира на последнем этаже; X_7 – дом меньше пяти этажей; X_8 – пятиэтажный дом; X_9 – дом выше девяти этажей; X_{10} – кирпичный дом; X_{12} – квартира в отличном состоянии; X_{13} – квартира в хорошем состоянии; X_{14} – имеется балкон; X_{15} – имеется лоджия; X_{145} – имеется остекленье на лоджии или балконе; $_{16}$ – раздельный санузел; X_{161} – металлическая дверь; X_{162} – решетки на окнах; X_{18} – логарифм расстояния до центра города, ln(м).

После сбора данные они были оформлены ввиде таблиц по годам и подвергнуты «чистке», так как в некоторых объявлениях информация была неполной, а так же исключены факторы, которые встречались редко и не являлись значимыми.

По окончательным таблицам построены регрессионые модели. Проведен анализ факторов, влияющих на ценообразование с использованием программного обеспечение GRETL.

Проанализируем рынок недвижимости 1998г. Построена модель $y = 143,997 + 2,7826x_1 - 31,363x_7 + 28,038x_{161} - 16,0747x_{18}$. Это означает, что цена квартиры зависит от площади и удаленности от центра, также на цену влияет наличие металлической двери и расположение квартиры на первом этаже. Значительное повышение цены при наличии металлической двери объясняется тем, что такие двери ещё не получили широкое распространение, но являются лучшими по сравнению с обыкновенными. Небольшое количество предложений по продаже недвижимости в 1998г. говорит о застое рынка в связи с экономическим кризисом в стране.

Но со временем рынок стал развиваться. Появилось больше предложений и увеличилось число ценнообразующих факторов. Цены на недвижимость увеличиваются. Рассмотрим 2002г. Построена модель $y = 631,498 + 4,53784x_1 - 7,13762x_5 - 15,5758x_6 - 32,0876x_7 - 8,54145x_8 + 9,36487x_9 + 9,52179x_{10} + 8,36114x_{12} + 17,7516x_{16} - 51,5216x_{18}$. Это говорит о том, что по сравнению с 1998г. на ценообразование также стали влиять этажность дома, материал его постройки, состояние квартиры и совмещен ли санузел.

Недоверие к банкам подтолкнуло людей вкладывать деньги в недвижимость. Это увеличило спрос на квартиры, но предложение оставалось прежним. Поэтому к 2008г. наметился значительный рост цен на недвижимость. По 2008г. построена модель: $y = 2328,31+29,3881x_1-74,9732x_5-58,7938x_6-233,217x_7-125,973x_8+135,361x_{10}+57,1585x_{12}-217,729x_{18}$.

К 2015г. количество предложений по продаже недвижимости возрастает, что немного снизило цену. В 2015г. получена модель $y = 2407,93+23,6111x_1-55,1171x_5-25,1466x_6-304,771x_7-113,839x_8+36,4349x_{10}+72,7659x_{12}-238,225x_{18}$.

В ходе анализа выявлены постоянно значимые факторы, а именно площадь недвижимости и близость к центру города. Так же большое влияние на цену оказывают этажность и материал постройки.

Динамика коэффициентов модели совпадает с динамикой стоимости нефти, выраженной в долларах. Это значит, что изменение коэффициентов модели реагирует на изменение рынка недвижимости, который в свою очередь отражает общее экономическое развитие в нашей стране.

В приложении представлены скриншоты программы Gretl, используемой для анализа регрессионных моделей ценообразования. Скриншоты показывают полученные коэффициенты для моделей стоимости однокомнатных квартир, а также их значимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе было раскрыто понятие модели множественной регрессии, изучены её спецификации; рассмотрены особенности оценки модели и связанные с ней проблемы - мультиколлинеарность и гетероскедастичность, рассмотрены тестирование гипотез, в частности на проверку гетероскедастичности; были собраны эмпирические данные, по ним построен и оценен комплекс моделей, сделаны выводы по коэффициентам этих моделей.

В ходе изучения влияния различных факторов на ценообразование на рынке недвижимости в работе был рассмотрен метод регрессионного анализа. Регрессионный анализ является основным средством исследования зависимостей между переменными. Исследование коэффициентов ценообразования показало, что наиболее значимыми факторами являются площадь недвижимости и близость к центру города. Так же большое влияние на цену оказывают этажность и материал постройки. Динамика коэффициентов модели совпадает с динамикой стоимости нефти, выраженной в долларах. Это значит, что изменение коэффициентов модели реагирует на изменение рынка недвижимости, который в свою очередь отражает общее экономическое развитие в нашей стране.

Таким образом, поставленная цель и соотвествующие ей задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Айвазян, С.А.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д Мешалкин. — М.: Финансы и статистика, 1983. — С. 472.

2. *Дубров, А.М.* Многомерные статистические методы: Учебник. / А.М. Дубров, В.С. Мхитарян, Л.И Трошин. — М.: Финансы и статистика, 2003. — С. 352.

3. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М.: Наука, 2003. — С. 430.

4. *Магнус, Я.Р.* Эконометрика. Начальный курс: Учебник. - 6-е изд., перераб. и доп. / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. — М.: Дело, 2004. — С. 576.

5. *Фихтенгольц, Г.М.* Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1968.

6. *Балаш, О.С.* Эконометрическое моделирование пространственных данных: монография / О.С. Балаш, А.В. Харламов. — Саратов: Научная книга, 2010. — С. 112.

7. «Квартиры Саратова» — газета о недвижимости[Электронный ресурс]. — URL: http://topmetr.ru/ Яз. рус.

8. *Харламов, А. В.* Анализ динамики моделей ценообразования // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: материалы V Междунар. молодежной науч.-практ.конф. — Саратов: Научная книга, 2016. — С. 113–117.