Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Модели производства и равновесия

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Снигиревой Екатерины Владимировны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент

____________ ____________

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

____________ ____________

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В XX веке созданы и развиты различные теории и методы регулирования мировой экономики. Востребованность таких исследований особенно возросла после Великой депрессии (1929–1933 г.г.) и Второй мировой войны. Увеличилась необходимость в планировании (текущем, оперативном, стратегическом) и прогнозировании. Объясняется это, прежде всего тем, что современная экономика представляет собой открытую систему, построенную на прямых и обратных горизонтальных и вертикальных связях, и может успешно развиваться только при наличии эффективного управления этими связями, как на макро -, так и на микроуровне. При этом проблема создания рациональной и высокоэффективной межотраслевой экономики чрезвычайно важна для всех стран.

Важным инструментом прогнозирования является межотраслевой равновесный баланс, разработанный В.Леонтьевым, позволяющий анализировать экономику, как национальную, так и отдельных регионов и на основе этого вырабатывать адекватные меры.

Действительно, реальное равновесие на рынке возможно лишь при совпадении ожиданий производителей и потребителей, так как на практике равновесие достигается достаточно редко, поскольку в реальной жизни неизбежны экономические кризисы, неполное или неэффективное использование ресурсов. И даже, несмотря на это можно утверждать, что необходимость в балансовом методе очевидна.

В экономических моделях мы обычно встречаемся с недифференцируемыми функциями и с переменными, подчиненными ограничениям в форме неравенств, для изучения которых не могут применяться методы классического анализа и становится необходимым развивать новые методы, позволившие найти подход к задачам такого рода. Кроме того, здесь нужны те же методы, что и в теории игр, т. е. теория выпуклых множеств, топологические теоремы о неподвижной точке, теория положительных матриц, а также применение этих методов к проблемам математической экономики.

Целью работы является необходимость дать более полное описание внутренней математической методики экономических моделей и отметить связь этих методов с более широким понятием процессов принятия решений.

Объект исследования - математические понятия и законы, экономические модели и явления.

Предмет исследования - качественные характеристики различных математических моделей экономических объектов.

Сам процесс математического моделирования можно подразделить на четыре основных **этапа:**

- Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, т.е. запись в виде математических терминов сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели;

- Исследование математических задач, к которым приводят математические модели. Основной вопрос - решение прямой задачи, т.е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений;

- Корректировка принятой гипотетической модели согласно критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений;

- Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изученных явлениях и модернизация модели. Изучение и прогнозирование какого-либо экономического явления методом математического моделирования позволяет проектировать новые технические средства, прогнозировать воздействие на данное явление тех или иных факторов, планировать эти явления даже при существовании нестабильной экономической ситуации.

Теоретико-методологической основой исследования являются труды, описывающие математические методы в теории игр, программировании и экономике (С.Карлин [5], В.В.Громенко [4], В.В Федосеев [2] и др.).

Для решения поставленных задач были использованы следующие теоретические методы исследования: анализ, моделирование, синтез, топологический метод, сравнение.

В данном исследовании:

- Дано более полное описание внутренней математической методики экономических моделей и выявлена связь этих методов с более широким понятием процессов принятия решений.

- Проведен анализ становления и систематизированы основные положения теории факторов производства и равновесия и теории потребительского выбора;

- Показана роль теоретических знаний как экономического ресурса, приобретающего форму интеллектуального капитала; осуществлена классификация знаний для использования их в качестве основы объектов капитальной природы [1].

Практическая значимость – разработка программного продукта на языке C++, позволяющего исследовать неотрицательные матрицы на продуктивность и определить запас продуктивности, а также определить равновесные цены по матрице полных затрат.

Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основных определений, пяти теоретических глав, одной практической главы, заключения, списка использованных источников и приложений.

Введение содержит основные положения: актуальность темы исследования, анализ степени ее научной разработанности, определение объекта и предмета, формулировка цели и задачи, теоретико-методологическая основа исследования, теоретическая и практическая значимость. Данная работа состоит из 6 разделов:

В первом разделе **"Теория положительных матриц"** мы изучаем положительные и неотрицательные матрицы. Доказывается, что наибольшее по модулю собственное число положительной матрицы имеет кратность 1 в характеристическом многочлене, и существует строго положительный собственный вектор, соответствующий этому собственному числу. Аналогично результаты получены для неотрицательных матриц и даны приложения к линейным моделям Леонтьева.

Назовем матрицу A с неотрицательными элементами размера $n \times n$ продуктивной, если уравнение $x = Ax + y$ имеет неотрицательное решение x для любого неотрицательного вектора $y \in \mathbb{R}^n$. Это уравнение соответствует открытой модели Леонтьева, здесь y_i обозначает разность между произведенным i-й отраслью продуктом x_i(каждая отрасль для простоты выпускает ровно один продукт) и его количеством, потребляемым всеми отраслями, A - матрица производственных коэффициентов.

Теорема 1. *Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий*:

- *матрица $(I-A)^{-1}$ существует и неотрицательна (I-единичная матрица);*
- *наибольшее неотрицательное собственное значение A меньше единицы.*

Во втором разделе работы **"Теория производства"** приводятся предположения Леонтьева о нелинейной модели, включающей производство. Теория производства имеет дело, во-первых, с распределением производственных факторов по различным технологическим способам для производства потребительских товаров и, во-вторых, с распределением стоимости суммарного продукта по производственным факторам.

Во третьем разделе работы **"Модели леонтьевского типа и их эффективные точки"** сделаем вывод, что даже если для производства каждого продукта использовать несколько процессов, тем не менее все „эффективные"способы производства включают единственный производственный процесс для каждого способа, при условии, что объединенное производство не допускается и в распоряжении имеется только один первичный фактор. Это — известная теорема Самуэльсона о замещении, приведенная ниже.

Теорема 2. *Если внутри положительного ортанта существует допустимая тонка, то все эффективные точки положительного ортанта лежат в некоторой гиперплоскости и каждая тонка пересечения этой гиперплоскости с положительным ортантом эффективна.*

В четвертом разделе **"Теория потребительского выбора"** приведем описание некоторых задач, возникающих в математической теории потребительского выбора, а также изучим модель глобального равновесия, сочетающую в себе одновременно факторы производства и потребления.

Общую теорию равновесия, описывающую отношение спроса и потребления к ценам, а также другим экономическим факторам, можно подразделить на две главные части: 1) теорию производства, охватывающую также теорию распределения ценностей (в том виде, как она включена, например, в понятие двойственной цены), и 2) теорию потребления, имеющую дело с интересами отдельных покупателей, отражаемыми системой их предпочтений на определенные продукты.

Теория потребительского выбора имеет дело, по существу, со следующим вопросом: рассматривается потребитель с ограниченным бюджетом и с определенным набором предпочтений по отношению к различным наборам товаров. Какие количества он приобретет при данных рыночных ценах на различные товары? Другой важный вопрос заключается в следующем. По каким правилам изменяются предпочтения потребителя — в зависимости от изменения рыночных цен или его собственных доходов?

Предполагается, что для каждого потребителя имеется отношение предпочтения P между векторами $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ для любых двух векторов x и y либо х предпочитается y (записываем это, как xPy), либо y предпочитается x (yPx), либо ни один из этих векторов не предпочитается другому ($\overline{xPy}$ и $\overline{xPx}$, где $\overline{xPy}$ означает отрицание xPy). В последнем случае мы будем говорить, что x безразличен по отношению к y, и писать xly.

Изучается функция спроса x=*I(P,M)*, порожденная отношением P и константой M следующим образом: x неотрицателен; *(p,x)=M*; xPy при всех тех y, для которых *(p,y)<M*, когда вектор p и число M положительны. Исследуются также более общие варианты этой функции.

В пятом разделе **"Нелинейные модели равновесия"** рассмотрим ряд сходных между собой, но неперекрывающихся моделей, описывающих явления равновесия и обмена. Основным математическим инструментом, используемым при установлении существования решений каждой из этих моделей, является некоторая разновидность теоремы Какутани о неподвижной точке с небольшими дополнительными ухищрениями.

Состояние экономической системы в условиях конкуренции в любой момент времени может быть выражено в виде решения системы неравенств, описывающих спрос потребителей на товары, предложение товаров производителями и условие равновесия, заключающееся в превышении предложения над спросом на любом рынке. При этом предполагается, что если предложение некоторого товара избыточно, то цена этого товара равна нулю. Изучение существования равновесных решений облегчит понимание сущности дескриптивной и нормативной экономической теории.

Если конкурентные экономические модели дают достаточно точное описание действительности, то уже сам по себе факт существования решений для этих моделей является подтверждением их потенциальной полезности. Не меньшую важность имеет отношение существования конкурентно равновесных решений к проблеме экономики благосостояния.

Линейные уравнения моделей Леонтьева можно интерпретировать как выражение равновесия обмена между различными отраслями. Для приведения модели в большее согласие с действительностью нужно отказаться от предположения линейности, т. е. от условия, что числа a_{ij} — постоянные, не зависящие от X_i. Исследование некоторых важнейших нелинейных моделей и будет предметом этого раздела.

Переходим непосредственно к изложению сути моделей.

Пусть имеется n производителей, причем каждый производитель P_i производит некоторый товар G_i. Пусть $f_{ij}(x)$ $(i \neq j)$ обозначает количество денег, которое производитель P_i тратит на покупку товара G_i, если доход его равен x. Функции $f_{ij}(x)$ можно считать функциями спроса. Если каждый производитель тратит весь свой доход на покупку товаров у других производителей, то

$$x = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) \tag{1}$$

для всех i и любых $x>0$. Для удобства положим функции $f_{\mu}(x)$ тождественно равными нулю.

Экономические соображения подсказывают, что доход i-го производителя x_i определяется так, чтобы общее количество каждого товара, продаваемое производителем, равнялось общему количеству этого товара, купленному другими производителями. Математически нужно найти величины x_i, удовлетворяющие системе уравнений:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x_i) \tag{2}$$

Эта задача является нелинейным аналогом замкнутой модели Леонтьева.

Модель с переменными ценами. В рассмотренных до сих пор моделях все цены считались фиксированными, и для того, чтобы предложение было равно спросу, каждый производитель был вынужден управлять объемом своего выпуска. Теперь примем противоположную точку зрения и будем пытаться сбалансировать предложение и спрос, изменяя не объемы выпуска, а цены. В связи с этим возникает вопрос: существует ли такой набор цен, при котором стоимость товаров, проданных каждым производителем, равна стоимости покупаемых им товаров?

Согласно классическому закону спроса и предложения, цена товара повышается, если спрос на товар превышает имеющееся предложение, и понижается, если предложение превосходит спрос. Поэтому экономическое равновесие может быть достигнуто лишь если цены таковы, что спрос и предложение на каждый товар равны, принимая во внимание переменность цен. Обозначим через a_i количество товара G_i, производимое производителем P_i в некоторый фиксированный промежуток времени, а через p_i — цену одной единицы товара G_i. Если каждый производитель продаст весь выпущенный им товар, то его доход будет равен $p_i a_i$. Пусть $D_{ij}(p_1, p_2, ..., p_n) = x_{ij}$ представляет количество товара G_i, на которое предъявляет спрос производитель P_i. Функции D_{ij} по сути дела зависят от a_i (в том смысле, что цены p_i зависят от a_i). Предположение, что каждый производитель затрачивает весь свой доход, означает

$$p_i a_i = \sum_{j=1}^{n} p_j D_{ij}(p), \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

(Мы положили $D_{ii} = 0$.)

Предположим, что соотношение (3) справедливо для любого вектора цен p. Суммарный спрос на товары G_j равен $\sum\limits_{i=1}^{n} D_{ij}(p)$, а суммарное их предложение есть a_j. Условие равновесия имеет вид

$$a_i - \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p) = 0. \tag{4}$$

Задача заключается в следующем: существует ли для заданных a_i и функций спроса D_{ij} удовлетворяющих соотношению (3), неотрицательное решение p системы (4)? К сожалению, такое решение существует не всегда. Можно представить себе, например, что один из производителей поставляет товар, не пользующийся у остальных спросом; в этом случае левая часть равенств (4) становится положительной. Это соображение приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3. *Если неотрицательные функции $D_{ij}(p)$ удовлетворяют условию (3) при любом положительном векторе p и $a_i > 0$ для всех i, то существует вектор $p* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$, для которого*

$$a_j - \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p^*) \geq 0; \tag{5}$$

если в соотношении (5) для $j = j_0$ знак равенства не имеет места, то $p_{j_0}^* = 0$.

Эта теорема устанавливает, что всегда существуют цены, при которых предложение по меньшей мере равно спросу, и что нулевую цену имеют лишь перепроизводимые товары. Такая модификация закона спроса и предложения хорошо известна экономистам.

Модель с переменными ценами и объемами выпуска. В следующей модели вместе с ценами меняются как типы, так и количества поставляемых товаров. Например, качество предлагаемых услуг будет зачастую зависеть от вознаграждения, полученного поставщиком услуг. Поэтому предполагается существование функций предложения $S_{ij}(p)(i \neq j)$ представляющих количества товаров G_j, предлагаемых производителем P_i при ценах $p_1..., p_n$. Функции спроса $D_{ij}(p)$ определяются, как и прежде. Аналогом (3) служит уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} p_j S_{ij}(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j D_{ij}(p), \tag{6}$$

где $S_{ii}(p)$ снова положены тождественно равными нулю. Закон спроса и предложения приводит к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} S_{ij}(p) \geq \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p). \tag{7}$$

Нужно найти вектор цен p, удовлетворяющий (7) и приписывающий нулевую цену любому товару, для которого предложение превышает спрос.

Теорема 4. *Пусть $S_{ij}(p)$ и $D_{ij}(p)$ — непрерывные неотрицательные функции, такие, что равенства (6) выполняются при всех p и $\sum\limits_{i=1}^{n} S_{ij}(p) >$ 0 для всех j. Тогда существует неотрицательный вектор*

$$p^* = (p_1^*, ..., p_n^*), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1,$$

удовлетворяющий (7) и, кроме того, равенству

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^* \sum_{i=1}^{n} [S_{ij}(p^*) - D_{ij}(p^*)] = 0.$$

Выше были рассмотрены основные теоремы изучаемой темы. Теоретической основой для этого были [1],[3],[6].

В заключительном разделе **"Проверка продуктивности матрицы"** приведены примеры решения задач на нахождение продуктивности неотрицательных матриц, практически применены знания полученные в теоретических главах.

В **Приложении** представлены исходные программные коды реализации модели производства на языке C++. Разработан программный продукт, позволяющий исследовать неотрицательные матрицы на продуктивность и определить запас продуктивности, а также определяются равновесные цены по матрице полных затрат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе были изучены элементы теории производства, теории потребления и теории равновесия для того, чтобы дать возможно более полное описание внутренней математической методики экономических моделей и отметить связь этих методов с более широким понятием процессов принятия решений.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Таким образом, использование метода «затраты — выпуск» межотраслевого баланса позволяет не только изучить взаимозависимость между различными отраслями экономики, проявляющуюся во взаимовлиянии цен, объемов производства, капиталовложений и доходов, но и осуществить прогнозирование развития экономики страны, так как, задавшись ростом одного или группы продуктов, можно определить масштабы роста остальных отраслей экономики страны, а тем самым и темпы экономического роста, его отраслевую структуру.

Дано более полное описание внутренней математической методики экономических моделей и выявлена связь этих методов с более широким понятием процессов принятия решений.

Проведен анализ становления и систематизированы основные положения теории факторов производства и равновесия и теории потребительского выбора.

Показана роль теоретических знаний как экономического ресурса, приобретающего форму интеллектуального капитала; осуществлена классификация знаний для использования их в качестве основы объектов капитальной природы.

С практической точки зрения разработан программный продукт, позволяющий исследовать неотрицательные матрицы на продуктивность и определить запас продуктивности, а также определяются равновесные цены по матрице полных затрат. Полученные результаты позволяют выполнить моделирование экокномической модели, которая может быть использована для решения как учебных, так и задач, основанных на реальных данных.

Список литературы

[1] Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. — М.: ЮНИТИ, 1998.— 319 с.

[2] Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для студ. Вузов, обуч.по эконом.спец. Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999.— 391 с.

[3] Аллен Р. Математическая экономия - 1-изд. / Пер. с англ. под редакцией А.И. Латышева.— М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.– 648 с.

[4] Громенко В.В. Математическая экономика. -М.: МЭСИ, 2004. – 108 с.

[5] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.- М.: Мир, 1964. – 835 с.

[6] Печерских И.А., Семенов А.Г. Математические модели в экономике – Кемерово, 2011.– 191 с.

[7] Леонтьев В.В. Избранные произведения: в 3 т. / В.В. Леонтьев; науч. ред., вступ. статья А.Г. Гранберга. – М.: ЗАО "Издательство "Экономика 2006-2007. Т.1: Общеэкономические проблемы межотраслевого анализа. – 2006. – 407 с.