Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Бояровой Анны Александровны

Научный руководитель
д. ф.-м. н. ____________ А. К. Смирнов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Модель коллективного риска (рассматриваемая также, как динамическая модель страхования) предполагает, что договоры страхования заключаются страховщиком в моменты времени, образующие некоторый случайный процесс, каждый из договоров имеет свою собственную длительность.

В течение времени действия заключенного договора происходят некоторые страховые события, приводящие к убыткам страховой компании - страховщика.

Такая модель может рассматриваться как на конечном, так и на бесконечном интервале времени. Рассматривая данную модель всегда предполагается наличие некоторого начального капитала, выделяемого страховщиком для данного страхового портфеля.

Под процессом риска будем понимать процесс изменения капитала страховой компании, который изменяется по двум причинам: он увеличивается благодаря поступлению взносов от клиентов (страховых премий) и уменьшается из-за страховых выплат.

Основной целью изучения процессов риска как математических моделей функционирования страховых компаний является оптимизация параметров деятельности таких, как, страховые тарифы (ставки страховых премий) и страховые выплаты.

При принятии соответствующих решений руководствуются различными критериями оптимальности.

Принимая во внимание стохастичность процесса риска, можно определить вероятностное распределение суммарных страховых выплат за рассматриваемый промежуток времени и, зная это распределение, вычислить размер страховых премий, гарантирующий желаемый объем резерва с требуемым уровнем достоверности. Как правило, такие задачи, связанные с распределением суммарных страховых выплат, решаются методами предельных теорем теории вероятностей, включающими как собственно предельные теоремы, так и теорию больших уклонений.

Другим широко распространенным критерием оптимальности функционирования страховой компании является вероятность разорения, под которой понимается вероятность того, что процесс риска опустится ниже некоторого уровня в течение определенного промежутка времени (конечного или бесконечного). Задачи, связанные с изучением вероятности разорения представляют еще одно важное направление в теории коллективного риска.

Более того, как правило, задачи, связанные с распределением суммарных страховых выплат, решаются теми же методами, что и задачи теории индивидуального риска. Поэтому именно задачи, связанные с изучением вероятности разорения, дают основания говорить о математической теории коллективного риска как о самостоятельном направлении страховой математики.

Так как расчёт риска разорения является одной из основ для дальнейшего успешного развития предприятия, актуальность определила выбор темы данной работы: "Дискретная динамическая модель коллективного риска".

Целью работы являлось изучение процессов в страховании, их основных характеристик и моделирование этих процессов.

Объектом исследования - дискретная динамическая модель коллективного риска - модель Спарре Андерсена.

Предметом исследования - характеристики процесса страхования (вероятность разорения).

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие задачи:

— рассмотреть модели коллективного риска: процесс риска Спарре Андерсена, классический процесс, а также пуассоновский процесс риска;
— определить простейшие и информационные свойства, а также суммарные выплаты для пуассоновского процесса;
— рассмотреть вероятность разорения, получить для неё асимптотические разложения при малой нагрузке и определить двусторонние оценки вероятности разорения;
— смоделировать процесс риска Спарре Андерсена для определения статистических оценок основных характеристик данного процесса;

1 Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из трёх глав.

Первый раздел посвящен моделям коллективного риска.

Будем рассматривать текущий резерв страховой компании, который складывается из начального капитала u и страховых премий, внесенных каждым клиентов, заключивших контракт в течение времени $[0,t]$, за вычетом страховых выплат по страховым случаям в течение этого интервала.

Пусть υ_i - страховой взнос i-го клиента. Тогда доход страховой компании за промежуток времени $[0,t]$ будет вычисляться по формуле:

$$W_+(t) = \sum_{i=1}^{N_+(t)} \upsilon_i,$$

где $N_+(t)$ - количество контрактов, заключенных за время $[0,t]$.

Также рассмотрим такие показатели, как T_i и θ_i, $i \geq 1$, которые являются последовательностью моментов и размеров страховых выплат соответственно $(0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ...)$. Будем считать, что $N_-(t) = max\{n : T_n \leq t\}$, то есть $N_-(t)$ - есть количество страховых выплат за промежуток времени $[0,t]$. Тогда суммарные потери страховой компании за соответствующее время будут равны:

$$W_-(t) = \sum_{i=1}^{N_-(t)} \theta_i,$$

Дадим определение процесса риска, который определяется соотношением:

$$W(t) = u + W_d(t),$$
$$\text{где } W_d(t) = W_+(t) - W_-(t) = \sum_{i=1}^{N_+(t)} \upsilon_i - \sum_{i=1}^{N_-(t)} \theta_i.$$

где u – выступает в роли начального капитала страховой компании, а величина $W_d(t)$ представлена, как “динамическая компонента” резерва страховой компании в момент времени t.

А также обозначим момент разорения, как

$$\tau = inf\{t : W(t) < 0\}.$$

Предполагается, что если величины T_i, θ_i и $i \geq 1$,а также процесс $W_+(t)$ являются случайными, то и сам процесс риска $W(t)$, вместе с моментом разорения τ также будут случайны.

Величины вида:

$$\psi(u) = P(\tau < \infty | W(0) = u) \text{ и } \psi(t, u) = P(\tau \leq \infty | W(0) = u)$$

будем называть вероятностями разорения на бесконечном и конечном промежутке времени, соответственно, при начальном капитале u.

Иногда используют более удобную формулу с вероятностью разорения:

$$\Phi(u) = 1 - \psi(u), u \geq 0 \text{ (для } u < 0, \Phi(u) = 0).$$

С целью упрощения модели теперь рассмотрим случай, когда случайные величины $\upsilon_i, i = 1, 2...$ независимы между собой, а также от процесса $N_+(t)$ и имеют одно и то же распределение.

Самым простым предположением о виде процесса $N_+(t)$ является, естественно, то, что этот процесс – однородный пуассоновский с некоторой интенсивностью λ_+ и существует величина $b = E\upsilon_1$, тогда:

$$EW_+(t) = b\lambda_+ t, t \geq 0.$$

Если вокруг математического ожидания разброс возможных значений случайной величины υ_i вокруг b невелик, то ступенчатый случайный процесс $W_+(t)$, который описывает доход страховой компании, можно приблизить его математическим ожиданием, имеющим вид линейной функции:

$$W_+(t) \approx ct, \text{ где } c = b\lambda_+.$$

Аналогично, далее будем предполагать, что случайные величины $\theta_i, i = 1, 2...$, независимы между собой и от процесса $N_-(t)$. Также пусть случайные величины θ_i имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$, а процесс $N_-(t)$ - является процессом восстановления, то есть случайные величины $\theta_i = T_i - T_{i-1}$, независимы и одинаково распределены.

Более того, предполагается, что $E\theta_1 = \mu < \infty$ и $E\vartheta_1 = \alpha < \infty$.

Случайный процесс вида:

$$W(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i, t \geq 0,$$

будем называть процессом риска Спарре Андерсена, где u - начальный капитал страховой компании, $c > 0$, $N(t)$ – процесс восстановления, $\theta_1, \theta_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(0) = 0$, независимые от процесса $N(t)$.

В рассмотрении ограничимся случаем, когда $N(t)$ является простым процессом восстановления, тогда:

$$N(t) = max\left\{n > 0 : \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\right\},$$

где $\{T_i\}$ является последовательностью одинаково распределенных случайных величин, независимых в совокупности со случайными величинами $\{\theta_i\}$.

Тогда величина $W(t)$ при данном предположении в моменты $\{t_i = T_1 + ... + T_i\}$ может быть представлена в виде:

$$W(t_i) = W(t_{i-1}) + cT_i - Y\theta_i, \text{ где } i = 1, 2, ...; t_0 = 0, W(t_0) = r.$$

Данная запись демонстрирует факт того, что по сути последовательность $W_i = W(t_i)$ представляет собой случайное блуждание, порождаемое величинами $cT_i - \theta_i$, и традиционной задачей классической теории риска является изучение вероятности разорения, то есть величины $P(min_i W_i < 0 = \psi(r))$, которая является задачей о вероятности пересечения случайным блужданием $\{W_i\}$ нулевого уровня.

Величину

$$\rho = \frac{c\alpha - \mu}{\mu} = \frac{c\alpha}{\mu - 1} - 1$$

будем называть нагрузкой (или коэффициентом безопасности), под которой понимается «удельный» доход страховой компании в единицу времени.

Дадим определение классическому процессу риска.

Процесс Спарре Андресена, в котором $N(t)$ является пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ называется классическим.

Иными словами, классическим процессом риска называется процесс вида:

$$W(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i, t \geq 0,$$

где $c>0, N(t)$ – пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$-независимые случайные величины с общей функцией распределения $F_\xi(x)$ такой, что $F(0)=0$, и $E\theta_1=\mu>0$ и независимые от случайного процесса $N(t)$. Здесь случайные величины $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ имеют смысл последовательных выплат страховой компании (страховых требований),$N(t)$ имеет смысл их количества до некоторого момента времени t, а коэффициент c равен (постоянной) интенсивности страховых премий.

И для данного процесса нагрузка уже будет иметь иной вид:

$$\rho=\frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}=\frac{c}{\lambda\mu}-1.$$

Для процесса риска Спарре Андерсена W(t) будет иметь вид:

$$EW(t)=u+(c-\frac{\mu}{\alpha})t.$$

Поэтому, если $c\alpha<\mu$,т.е. соответствует отрицательной нагрузке безопасности, то ожидаемое значение резерва линейно убывает с ростом t. В таком случае можно показать, что при любом значении начального капитала u вероятность разорения $\psi(u)$ равна единице.

Далее внимание будет уделяться простейшему пуассоновскому процессу, делая акцент на тех свойствах, которые позволяют считать его основной математической моделью потока событий, которые абсолютно хаотично рассредоточены во времени. Случайный процесс вида $\{\xi(t), t\geq 0\}$, называется пуассоновским, если он обладает следующими свойствами:

1 свойство: $\xi(t)$ – процесс с независимыми приращениями, то есть для любых $n, t_0, \dots, t_n$ (где n – натуральное, а $t_0, t_1, \dots, t_n$ – вещественные) случайные величины $\xi(t_1)-\xi(t_0), \dots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ независимы;

2 свойство: $\xi(t)$ – однородный процесс, то есть для любых s, t и $h>0$ случайные величины $\xi(t+h)-\xi(t)$ и $\xi(t+h)-\xi(s)$ одинаково распределены;

3 свойство: $\xi(0)=0$;

4 свойство: при $h\downarrow 0$ и некотором $\lambda>0$:

$$P(\xi(h)=0)=1-\lambda h+o(h);$$
$$P(\xi(h)=1)=\lambda h+o(h);$$
$$P(\xi(h)\geq 2)=o(h).$$

$$P(\xi(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, k=0,1,...$$

Иначе говоря, случайная величина $\xi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt,

$$\xi(t) \sim P(\lambda t).$$

Итак, пуассоновский процесс принимает только целые неотрицательные значения. При этом свойство 4 означает, что траектории пуассоновского процесса не убывают, кусочно-постоянны, непрерывны справа, а их скачки имеют одинаковую величину, равную единице.

Параметр λ называется интенсивностью пуассоновского процесса и имеет смысл среднего числа скачков пуассоновского процесса за единицу времени:

$$E\xi(t) \equiv D\xi(t) \equiv \lambda t.$$

Точками скачков пуассоновского процесса назовем $\tau_0 = 0, \tau_1$ и т.д.

Итак, будем рассматривать однородный пуассоновский процесс, в котором величины $\tau_n - \tau_{n-1}, n \geq 0$ одинаково распределены. Учитывая то, что Пуассоновский процесс имеет независимые приращения, эти величины независимы. В силу однородности, чтобы определить тип распределения этих величин, нам достаточно рассмотреть лишь одну из них. Возьмем, к примеру,$\tau_1 - \tau_0 = \tau_1$.Событие $\{\tau_1 > t\}$ будет эквивалентно событию $\{\xi(t) = 0\}$ и поэтому

$$P(\tau_1 \leq t) = 1 - P(\tau_1 > t) = 1 - P(\xi(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Иначе говоря, случайные величины $\tau_n - \tau_{n-1}, n \geq 1$,независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ.

Если в пуассоновском процессе точки скачков отождествить с моментами регистрации некоторых однотипных событий, то смысл общего количества событий, зарегистрированных до момента t принимает $\xi(t)$. В этом смысле оказывается очень полезно рассматривать пуассоновский процесс как точечный процесс на полупрямой $t \geq 0$.

Последовательность случайных величин $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ называется точечным процессом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1^0. Если $\tau_n < \infty$, то $\tau_{n+1} > \tau_n$;

2^0. Для всякого $t < \infty$ найдется такое n, что $\tau_{n+1} > t$.

Случайную (считающую) целочисленную неотрицательную меру $\nu(A)$, определённую на борелевских множествах A, можно связать со всяким точечным процессом $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ положив

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} l(\tau_k \in A).$$

Каждая траектория точечного процесса однозначно определяет реализацию случайной считающей меры и наоборот, поэтому иногда точечные процессы определяют, как случайные меры. Например, если $A = [0; t), a\{\tau_n\}_{n\geq1}$ - точки скачков пуассоновского процесса $\xi(t)$, то, очевидно,

$$\nu([0; t]) = \xi(t).$$

Далее для пуассоновского процесса рассматрены информационные свойства.

Показательное распределение характеризует пуассоновский процесс в классе процессов восстановления.

Случайный процесс вида:

$$\nu(t) = max\{n : \xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_n \leq t\},$$

назовем процессом восстановления, если $\xi_0 = 0$, а $\xi_1, \xi_2, ...$- независимые.

Если случайные величины $\{\xi_j\}_{j\geq1}$процесса восстановления имеют показательное распределение с некоторым параметром $\lambda > 0$, то $\nu(t)$– пуассоновский процесс.

Пусть ε – эксперимент, в котором может осуществиться лишь один из n исходов $A_1, ..., A_n$.

Обозначим

$$P(A_i) = p_i(p_1 + ... + p_n = 1).$$

Тогда мы можем считать информацию, полученную в результате этого эксперимента, случайной величиной, принимающей значения $I(A), ..., I(A_n)$ соответственно с вероятностями $p_1, ..., p_n$.Обозначим эту случайную величину $Q(\varepsilon)$.

Введем следующую интегральную информационную характеристику ε, называемую энтропией $H(\varepsilon)$ эксперимента ε:

$$H(\varepsilon) = EQ(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Энтропия эксперимента может служить мерой его неопределенности, что подтверждается совпадением свойств формально введенной величины

$H(\varepsilon)$, приводимых в следующей теореме, с ожидаемыми с позиций здравого смысла свойствами разумной меры неопределенности.

Теорема 1. Величина $H(\varepsilon)$ обладает следующими свойствами:

1. $H(\varepsilon) \geq 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда существует $i \in \{1, ..., n\}$такое, что $p_i = 1$.

2. Пусть ε_0– эксперимент с n равновероятными исходами. Тогда $H(\varepsilon) \leq H(\varepsilon_0)$,каким бы ни был эксперимент ε с таким же числом n возможных исходов.

3. Пусть ε_1– эксперимент с $n-1$ исходом, построенный из эксперимента ε с помощью объединения двух исходов, скажем, A_i и $A_j (i \neq j)$,и пусть ε_2 – эксперимент с исходами A_i и A_j, вероятности которых (в рамках ε_2) соответственно равны:

$$p_i = (p_i + p_j) \text{ и } p_j = (p_i + p_j).$$

Тогда

$$H(\varepsilon) = H(\varepsilon_1) + (p_i + p_j)H(\varepsilon_2).$$

4. Энтропия $H(\varepsilon)$ зависит не от $A_1, ..., A_n$, а от $p_1, ..., p_n$, будучи симметрической функцией переменных $p_1, ..., p_n$.

5. Энтропия $H(\varepsilon)$ - непрерывная функция от $p_1, ..., p_n$.

А также были рассмотрены суммарные выплаты для пуассоновского процесса.

Резерв страховой компании, описываемый процессом риска Спарре Андерсена является случайной величиной в произвольный момент времени t. Учитывая то, что случайная величина $N(t)$ в нашем случае независима от страховых требований $\theta_1, \theta_2, ...$ данное распределение можно записать в виде (по формуле полной вероятности):

$$P(W(t) < x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) = n)F^{*n}(u + ct - x + 0),$$

где F^{*n}- n-кратная свёртка функции распределения $F(x) = P(\theta_1 < x)$ с самой собой: $F^{*0}(x)$ – это вырожденная функция распределения с единственным скачком в нуле, $F^{*1}(x) = F(x)$,а для $n \geq 2$

$$F^{*n}(x) = \int_0^x F^{*(n-1)}(x - y)dF(y).$$

Аналогично для случайной величины $N(t)$, имеющей пуассоновское распределение с параметром λt имеем:

$$P(W(t) < x) = 1 - \epsilon^{-\lambda t \frac{(\lambda t)^n}{n!}} F^{*n}(u + ct - x + 0).$$

Вычисления по приведенным выше формулам затруднены, даже если мы абсолютно точно знаем функцию распределения $F(x)$. Поэтому разумно использовать асимптотические аппроксимации для вычисления распределения резерва страховой компании при большой интенсивности потока выплат и/или для достаточно удаленного момента времени.

Приведем доказательство факта, что классический процесс риска асимптотически нормален при $\lambda t \to \infty$. Для простоты будем рассматривать процесс с дискретным временем $W_n, n = 0, 1, ...$, полагая $W_n = W(n)$ (вместо процесса $W(t)$ с непрерывным временем).

С практической точки зрения это предположение хорошо согласуется, так как обычно время измеряется дискретными единицами: сутками, часами, минутами. В таком случае совсем трудно представить себе реальную ситуацию, когда страховая компания фиксирует моменты выплат по страховым случаям с точностью до секунд. Аналогично, $N_n = N(n)$.

Предположим, что случайные величины $\{\theta_j\}_{j \geq 1}$ одинаково распределены с математическим ожиданием $E\theta_1 = \mu$ и дисперсией $D\theta_1 = \sigma^2 < \infty$ и $N(t)$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$.

Теорема 2. Классический процесс риска асимптотически нормален: для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{W_n - n(c - \mu\lambda) - u}{\sqrt{n\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Свойство асимптотической нормальности также присуще любому процессу риска Спарре Андерсена, в котором страховые требования имеют конечные дисперсии, а процесс $N(t)$ асимптотически нормален.

Теорема 2 дает возможность при больших значениях λt использовать приближенную формулу, то есть аппроксимирующее выражение вида:

$$P(W(t) < x) \approx \Phi\left(\frac{x - t(c - \lambda\mu) - u}{\sqrt{\lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}}\right),$$

Во втором разделе рассматривается вероятность разорения.

Под разорением понимается событие, при котором сумма страховых выплат страховщика в некоторый момент времени оказывается больше суммы его начального резерва и суммы собранных страховых премий (та часть полного взноса страхователя, которая зачисляется в страховой фонд).

При вычислении вероятности разорения для модели индивидуального риска достаточно рассмотреть итоговые суммы убытков и страховых премий по всему страховому портфелю.

В свою очередь, при рассмотрении модели коллективного риска вероятность разорения можно понимать, как минимум в трёх смыслах.

Во - первых, можно рассматривать вероятность разорения в данный момент времени, под которой понимается вероятность того, что в данный момент времени сумма убытков превосходит величину страхового фонда страховщика (то есть суммы начального капитала и собранных к данному моменту страховых премий).

Во - вторых, можно рассматривать вероятность разорения на фиксированном конечном интервале времени, под которой понимается вероятность того, что в течение рассматриваемого интервала времени сумма убытков хотя бы раз превзойдет величину страхового фонда страховщика.

Наконец, в - третьих, можно рассматривать вероятность разорения на бесконечном интервале времени, под которой понимается вероятность того, что когда-нибудь сумма убытков превзойдет величину страхового фонда страховщика. Последний случай изучен наиболее глубоко и всесторонне. Именно ему и будет уделено основное внимание при рассмотрении моделей коллективного риска.

Вероятность разорения рассматривается как функция основных параметров процесса риска. Одним из признанных основоположников теории коллективного риска является шведский математик Ф. Лундберг. Именно в его работах были поставлены задачи об отыскании вероятности разорения и приведены первые оценки этой вероятности, в частности, знаменитое ныне неравенство Лундберга. Однако его работы не содержали четких математических формулировок и были довольно трудны для однозначного восприятия. Поэтому возникновение математической теории коллективного риска обычно связывают с именем выдающегося шведского математика Г. Крамера, в работах которого было начато систематическое изучение вероятности разорения. Его классические результаты, описывающие поведение вероятности разорения в зависимости от величины начального капитала, вошли во многие учебники по теории вероятностей. Эти результаты стали основой для целого направления асимптотической теории риска, рассматривающей поведение вероятности разорения при неограниченно возрастающем начальном капитале. Эта проблематика остается очень популярной и в настоящее время.

В этой части работы внимание уделяется получению асимптотического разложения для вероятности разорения $\psi(u)$ в классическом процессе риска $W(t)$ при малой нагрузке безопасности, то есть при $\rho \longrightarrow 0$, где

$$\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

Теорема 4. Предполагается, что $E\theta_1^3 < \infty$, тогда для любого положительного начального капитала $u > 0$ при малой нагрузке безопасности $\rho \longrightarrow 0$ имеет место соотношение вида:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} exp\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)E\theta_1^2}\} \times [1 + (\frac{2\mu E\theta_1^3}{3(E\theta_1^2)^2} - 1)(\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)E\theta_1^2} - 1)\frac{\rho}{1+\rho}] + o(\rho).$$

Далее рассмотрена асимптотическая аппроксимация вероятности разорения при большом начальном капитале.

Функция распределения $F_\xi(x)$ удовлетворяет условию Крамера–Лундберга, если существует положительное число L такое, что

$$\frac{\lambda}{c} \int\limits_0^\infty \epsilon^{Lx}[1 - F_\xi(x)]d\xi = 1,$$

при этом L называется показателем Лундберга.

Для $r > 0$ обозначим производящую функцию моментов

$$M(r) = \int\limits_0^\infty \epsilon^{rx} dF(x).$$

Предполагается, что нагрузка безопасности положительна $\rho > 0$, так как $c > \lambda\mu$.

Теорема 5. Предположим, существует положительное число r_0 (возможно, равное бесконечности) такое, что $M(r) \uparrow \infty$ при $r \uparrow r_0$, притом что функция распределения $F(x)$ страховых требований удовлетворяет условию Крамера–Лундберга, тогда

$$\lim_{u\to\infty} \epsilon^{Lu}\psi(u) = \frac{\rho\mu}{M'^{(r)} - \frac{c}{\lambda}}.$$

И были получены двусторонние оценки для вероятности разорения следующего вида:

$$Ce^{-Lu} \leqslant \psi(u) \leqslant Ce^{-Lu},$$

где

$$C = \inf_{y>0}\{e^{-Ly}(1-F(y))(\int_y^{\infty} e^{Lz}dF(z))^{-1}\}$$

$$C = \sup_{y>0}\{e^{-Ly}(1-F(y))(\int_y^{\infty} e^{Lz}dF(z))^{-1}\}$$

Третий раздел посвящен моделированию процесса риска.

В силу множества причин распределение страховых требований никогда не бывает известно с исчерпывающей точностью. Аналогично, изначальные представления об интенсивности предстоящих страховых выплат могут не совпадать с реальной ситуацией. Поэтому аналитические метод, могут дать неаккуратные оценки для параметров процесса риска.

Таким образом, с течением времени может возникнуть необходимость сверить априорные расчёты, определяющие вероятность разорения, с тем, как развитие процесса происходит в действительности.

Тем самым переходим к задаче о статистическом оценивании вероятности разорения, а также других параметров процесса риска по предыстории.

Будем считать, что в момент времени $t > 0$ известны следующие параметры:

a) коэффициент c, который определяется страховой компанией и/или действующим законодательством;

b) моменты осуществления выплат, а точнее лишь информация об их количестве $N(t)$ до момента времени t;

c) размеры страховых выплат $\theta_1, ..., \theta_{N(t)}$;

Неизвестными будем считать: функцию распределения $F(x)$ страховых выплат и интенсивность потока выплат $-\lambda$.

Рассмотрим задачу построения точечных статистических оценок для вероятности разорения, при этом величина начального капитала u известна и может быть произвольна:

$$\psi(u) = P\left(\inf_{t>0} W(t) < -u\right).$$

Рассмотрим подход, основанный на использовании асимптотики Крамера–Лундберга. Идея данного подхода заключается в замене неизвестных параметров их эмпирическими аналогами.

При определенных условиях на хвост функции распределения $F(x) = P(X_1 < x)$ из теоремы 5 и при большом стартовом капитале u справедливо соотношение:

$$\psi(u) \approx \epsilon^{-Lu} \tfrac{\rho\mu}{M'(L)-\frac{c}{\lambda}},$$

где L – показатель Лундберга, а $M(r)$ – производящая функция моментов случайной величины θ_1.

Эмпирическим аналогом $M(r)$ является случайная величина вида:

$$\tilde{M}(r) = \tfrac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \epsilon^{\rho\theta_i}.$$

Показатель Лундберга, в свою очередь, является корнем уравнения

$$M(r) = \tfrac{cr}{\lambda}.$$

Наилучшей оценкой параметра λ будет являться:

$$\tilde{\lambda} = \tfrac{N(t)}{t}.$$

Определим статистическую оценку $\tilde{L}_t$ параметра L, заменив уравнение его эмпирическим аналогом как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{N(t)} \epsilon^{\rho\theta_i} = crt.$$

При фиксированных значениях $N(t), \theta_1, ..., \theta_{N(t)}$

$$\left(\tilde{M}(r)\right)' = \tfrac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i \epsilon^{r\theta_i}.$$

А также наилучшей оценкой для μ будет являться

$$\bar{\theta} = \tfrac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i.$$

Полученные статистические оценки подставим вместо соответствующих параметров и получим окончательную оценку:

$$\tilde{\psi}_1(u) = \frac{\epsilon^{-\tilde{L}_t}(ct - N(t)\bar{\theta}}{\bar{\theta}\left[\sum\limits_{i=1}^{N(t)} \theta_i \epsilon^{\tilde{L}_t \theta_t} - ct\right]}.$$

В силу замкнутости формул, определяющих оценку $\tilde{\psi}_1(u)$, эту оценку всегда можно вычислить. Однако слепое доверие к формуле может привести к ложным выводам. К сожалению, аппроксимация Крамера– Лундберга, лежащая в основе данной оценки, применима лишь при выполнении весьма суровых условий на хвост функции распределения $F(x)$, ключевым из которых является как минимум экспоненциально быстрое его убывание. На практике же поведение хвоста распределения не известно никогда, поскольку заключение о распределении $F(x)$ можно сделать только на основании конечной выборки $\theta_1, ..., \theta_{N(t)}$, а стало быть, для значений аргумента x, превосходящих максимальное из наблюдений $\theta_1, ..., \theta_{N(t)}$, выводы о поведении $F(x)$ исключительно ненадежны.

Таким образом, возникает опасная ситуация для практических выводов: вычисления по формуле при фиксированных наблюдениях всегда приводят к конкретному числу, но далеко не всегда ясно, какое отношение это число имеет к оцениваемой вероятности разорения.

Подставляя эмпирические аналоги вместо их теоретических моментов, приходим к следующей оценке:

$$\tilde{\psi}_2(u) = \frac{1}{1+\tilde{\rho}(t)} \exp\left\{-\frac{2\tilde{\rho}(t)m_1(t)u}{(1+\tilde{\rho}(t))m_2(t))}\right\} = \frac{N(t)\bar{\theta}}{ct} \exp\left\{\frac{2\bar{\theta}u(ct - N(t)\bar{\theta})}{ctm_2(t)}\right\},$$

где $m_1(t) = \bar{\theta}$,

$$m_k(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i^k = 1, 2, 3, ...,$$

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{ct}{N(t)\bar{\theta}} - 1.$$

Замена теоретических моментов на их эмпирические аналоги приводит к оценке (имеет практический смысл лишь в том случае, когда значение $\tilde{\rho}(t)$ положительно и невелико):

$$\tilde{\psi}_3(u) = \frac{1}{1+\tilde{\rho}(t)} \exp\left\{-\frac{2\tilde{\rho}(t)\bar{\theta}u}{(1+\tilde{\rho}(t))m_2(t)}\right\} \times \left[1 + \left(\frac{2\bar{\theta}m_3(t)}{3m_2^2(t)} - 1\right)\left(\frac{2\tilde{\rho}(t)\bar{\theta}u}{(1+\tilde{\rho}(t))m_2(t)} - 1\right)\frac{\tilde{\rho}(t)}{1+\tilde{\rho}(t)}\right].$$

Вычислительная часть работы посвящена моделированию процесса Спарре Андерсона, когда закон распределения случайных величин θ_k имеет следующий вид:

$$P(\theta = k) = \frac{((k+1)^2 - k^2)}{m^2 - 1}, 1 \leq k \leq m - 1$$

Программа подсчитывает основные теоретические характеристики данного процесса: математическое ожидание, дисперсию, коэффициент нагрузки.

Далее при заданном начальном капитале находит оценку вероятности разорения, а также определяет частоту разорения страховой компании.

Данное моделирование создано для помощи в нахождении оптимального соотношения параметров для страховой компании. Реализация соответствующего моделирования представлена в ПРИЛОЖЕНИИ А.

Третий раздел посвящен моделированию процесса риска Спарре Андерсона, когда закон распределения случайных величин θ имеет следующий вид:

$$P(\theta = k) = \frac{((k+1)^2 - k^2)}{m^2 - 1}, 1 \leq k \leq m - 1$$

Программа подсчитывает основные теоретические характеристики данного процесса: математическое ожидание, дисперсию, коэффициент нагрузки.

Далее при заданном начальном капитале находит оценку вероятности разорения, а также определяет частоту разорения страховой компании.

Данное моделирование создано для помощи в нахождении оптимального соотношения параметров для страховой компании. Реализация соответствующего моделирования представлена в ПРИЛОЖЕНИИ А.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первая часть работы была посвящена моделям коллективного риска: процессу риска Спарре Андерсона, классическому процессу риска, пуассоновскому процессу, для него более подробно рассматривались простейшие и информационные свойства, а также суммарные выплаты.

В следующей части работы были рассмотрены вероятности разорения, были получены асимптотические разложений при малой нагрузке безопасности, неравенства для вероятности разорения: вывод неравенств Лундберга и двусторонних оценок.

Заключительная глава представляет собой моделирование процесса риска Спарре Андерсона с заданным законом распределения, а также представлена реализация получения вероятности разорения при заданном стартовом капитале.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Ширяев, А.Н. Вероятность: в 2 т. / А. Н. Ширяев. М.: МЦНМО, 2004. Кн.1 - 520 с. Кн.2 - 408 с. 3-е изд.

2 Климов, Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. П. Климов. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1983. - 328с.

3 Ермасов, С. В. Ермасова, Н. Б. Страхование / С. В. Ермасов, Н. Б. Ермасова. М.: Высшее образование, 2008. 443с.

4 Голубин, А.Ю. Математические модели теории страхования: построения и оптимизация / А. Ю. Голубин. М.: Анкил, 2003. - 160с.

5 Корнилов, И.А. Элементы страховой математики. Учебное пособие / И. А. Корнилов. М.: Мир, 2004. 238с.

6 Ротарь, В.И. Бенинг, В.Е. Введение в математическую теорию страхования. – Обозрение прикладной и промышленной математики / В. И. Ротарь, В. Е. Бенинг. 1994, т.1, вып.5

7 Эмбрехтс, П. Клюппельберг, К. Некоторые аспекты страховой математики, Теория вероятн. и ее примен. / П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг. 1993, т. 38, вып. 2

8 Брусов, П.Н. Финансовая математика: Учебное пособие / П. Н. Брусов, П. П. Брусов, Н. П. Орехова. М: Кнорус, 2013. 224с.

9 Четыркин, Е.М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин М: Дело, 2000. 400с.

10 Ширяев, А.Н. Теория риска / А. Н. Ширяев. М: МГУ, 1957. 581с.

11 Фалин, Г.И. Фалин, А.И. Теория риска для актуариев в задачах / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. М.: Мир, 2004. - 240с.

12 Королев, В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска / В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг, С. Я. Шоргин. М.: Физматлит, 2011. — 591с.

13 Леман Э. Теория точечного оценивания: Пер. с англ. / Э. Леман. М.: Наука Гл.ред.физ.мат.лит., 1991.- 448с.

14 Вентцель, А.Д. Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. М.: Наука Гл.ред.физ.мат.лит., 1975. - 320с.

15 Волков, И.К. Зуев, С.М. Цветкова, Г.М. Случайные процессы - МГТУ им. Н. Э. Баумана / И. К. Волков, С. М. Зуев, Г. М. Цветкова. 1999. - 448с.

16 Липцер, Р.Ш. Ширяев, А.Н. Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. М.: Наука Гл.ред.физ.мат.лит., 1974.- 696с.

17 Схороход, А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями / А.В. Скороход. М.:Наука, 1964. - 280с.

18 Ермаков, С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы / С. М. Ермаков. М.: Наука Гл.ред.физ.мат.лит., 1975. - 328с.

19 Кокс, Д.Р. Смит, В.Л. Теория восстановления / Д. Р. Кокс, В. Л. Смит. М.: Советское радио, 1967. - 300с.

20 Страуструп Б. Язык программирования C++ / Б. Страуструп. М.:Бином, 2011. - 1136с.