Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Выбор параметра регуляризации в задаче восстановления функции

Автореферат бакалаврской работы

студента 4 курса 411 группы направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления(специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Растегаева Алексея Олеговича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель,
профессор
д.ф.-м.н., профессор Г.В.Хромова

должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В. А. Юрко

должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

Теория некорректных задач —направление математики, связанное с самыми разнообразными прикладными проблемами: интерпретацией показаний многих физических приборов, геофизических, геологических, астрономических наблюдений, оптимизацией управления и планирования, синтезом автоматических систем. Развитие теории некорректных задач обусловлено появлением современной вычислительной техники.

Различные разделы теории некорректных задач могут быть отнесены к традиционным разделам математики, таким, как теория функций, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, линейная алгебра.

1. Понятие корректности (правильности) постановки задачи математической физики было сформулировано в начале нашего века известным французским математиком Адамаром. В настоящее время это понятие приводится в учебных пособиях по уравнениям математической физики или уравнениям с частными производными.

Задача математической физики или краевая задача для уравнения с частными производными называется поставленной корректно, если выполняются следующие условия:

1)решение задачи существует;

2)решение задачи единственно;

3)решение задачи непрерывно зависит от данных задачи.

Некорректно поставленные задачи возникают естественным образом при решении самых разнообразных прикладных задач, а также при исследованиях в области математической теории. Некорректно поставленные задачи или, другими словами, задачи, неустойчивые по отношению к погрешностям в их исходных данных, отличаются тем, что сколь угодно малые изменения в этих исходных данных могут приводить и приводят к произвольно большим изменениям решений таких задач. Важнейшим классом некорректных задач, возникающих в самых разнообразных приложениях, служит обширнейший класс оптимизационных задач, для которых свойство неустойчивости по отношению к возмущениям их исходных данных является характерным. В данной работе рассматривается одна из известных некорректно поставленных задач- задача восстановления непрерывных функций, заданных из приближения в метрике пространства $L_2[a,b]$. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух основных теоретических разделов, приложения, заключения и списка использованных источников.

Основное содержание работы

Во введении дается общее понятие корректности и некорректности задачи и краткое содержание работы.

В первом разделе «Задача восстановления непрерывной функции» рассмотрено восстановление непрерывной функции в рамках теории некорректно поставленных задач, приведены примеры таких задач и дается решение задачи восстановления с помощью оператора Стеклова и расширенного оператора Стеклова(S_h и $\underset{S_h}{\sim}\varphi$).

Простейшей некорректной поставленной задачей является задача восстановления непрерывных функций. Пусть некоторая функция $f(x)\epsilon\mathrm{C}[a,b]$.Точная функция $f(x)$ нам не известна, но известно $\|f\delta(x)-f(x)\|\leq\delta$ в $L_2[a,b]$, требуется найти такую функцию $f\delta(x)$, чтобы в пространстве $\mathrm{C}[a,b]$: $\|f\delta(x)-f(x)\|\to 0$ при $\delta\to 0$.Известно: $\|f(x)\| = \max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$. В пространстве $L_2[a,b]$: $\|f(x)\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$.

Рассмотрим оператор Стеклова:

$S_h\varphi= \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\varphi(t)dt.$

Возьмем оператор S_h и применим к f_δ:

Рассмотрим:

$|\, S_h f_\delta - f|$, применим неравенство треугольника:

$|S_h\, f_\delta - f| = |S_h f_\delta - S_h f + S_h f - f|$, таким образом получаем:

$|S_h f_\delta - S_h f + S_h f - f| \le |S_h(f_\delta - f)| + |S_h f - f|$ (1).

Возьмем $|S_h\, f - f|$, убедимся сначала, что $S_h 1 \equiv 1$:

$S_h 1 = 1 = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} dt = 1$, умножим обе части на $f(x)$, получим:

$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(x)dt = f(x)$

Отсюда получим:

$|S_h\, f - f| = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t) - f(x))dt$,

$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t) - f(x))dt \le \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t) - f(x)|dt$,

$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t) - f(x)|dt \le \omega(h)$,

$\omega(h) = \sup_{|t-x|\le h}|f(t) - f(x)|$,

Где $\omega(h)$- модуль непрерывности функции $f(x)$

Из определения непрерывности следует, что:

$|S_h\, f - f| \to 0$ при $h \to 0$

Теперь рассмотрим:

$|S_h(f_\delta - f)| = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |(f_\delta(t) - f(t)dt|$

Применим неравенство Буняковского-Шварца, имеющее вид:

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, тогда получим:

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |(f_\delta(t) - f(t)dt| \leq \frac{1}{2h}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}(f_\delta - f)^2 dt}\sqrt{2h},$$

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}(f_\delta - f)^2 dt}\sqrt{2h} \leq \frac{1}{\sqrt{2h}}\sqrt{\int_a^b(f_\delta - f)^2 dt},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2h}}\sqrt{\int_a^b(f_\delta - f)^2 dt} \leq \frac{\delta}{\sqrt{2h}},$$

$$\left|S_h|f_\delta - f|\right| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2h}},$$

$|S_h f_\delta - f| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2h}} + \omega(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Отрезок на который действует оператор Стеклова $[a + h, b - h]$.

Необходимо доопределить на $[a, a + h)$, $(b - h, b]$,

Возьмем $[a, b] = [0,1]$

Продолжим φ четным образом за границы отрезка, продолженную функцию назовем $\varphi(x)$,применим к ней оператор Стеклова:

$S_h\, \varphi_1 = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi_1(t)dt$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(-t), \text{если } t < 0 \\ \varphi(t), \ \text{ если } t\epsilon[0,1] \\ \varphi(-t+2), \ \text{ если } t > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Если мы заменим φ_1 согласно (2), то получим $\underset{S_h}{\sim}\varphi$

Пусть $x\epsilon[0, h]$, тогда:

$$\mathrm{S_h}\varphi_1 = \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{\mathrm{x-h}}^{\mathrm{x+h}} \varphi_1(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{\mathrm{x-h}}^{0} \varphi_1(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{x+h}} \varphi_1(\mathrm{t})\mathrm{dt},$$

$$\frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{\mathrm{x-h}}^{0} \varphi_1(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{x+h}} \varphi(-\mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{\mathrm{x-h}}^{0} \varphi_1(-\mathrm{t})\mathrm{dt} + \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{x+h}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Пусть $-t = t_1, dt = -dt_1, t = x - h, t_1 = h - x, t = 0, [a + h, b - h]$.

$$\frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{\mathrm{x-h}}^{0} \varphi(-\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_{0}^{\mathrm{h-x}} \varphi(\mathrm{t_1})\mathrm{dt_1} = \int_{0}^{\mathrm{h-x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$\mathrm{S_h}\varphi_1 = \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{h-x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{h+x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt}$, таким образом получим:

$$\frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{h-x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{h+x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{h}}\int_{0}^{\mathrm{h-x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \frac{1}{2\mathrm{h}}\int_{\mathrm{h-x}}^{\mathrm{h+x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt},$$

$\frac{1}{h}\int_{0}^{h-x} \varphi(t)dt + \frac{1}{2h}\int_{h-x}^{h+x} \varphi(t)dt$- расширенный оператор Стеклова $\underset{Sh}{\sim}\varphi$.

Пусть $x\epsilon[h,1-h]$, тогда $\tilde{S_h}\varphi = S_h\varphi$,

$x\epsilon[1-h,1]$:

$$S_h\varphi_1 = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\varphi_1(t)dt = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{1}\varphi_1(t)dt + \frac{1}{2h}\int_{1}^{x+h}\varphi_1(t)dt,$$

$$\tilde{S_h}\varphi = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{2-x-h}\varphi(t)dt + \frac{1}{h}\int_{2-x-h}^{1}\varphi(t)dt,$$

$\tilde{S_h}\varphi = \frac{1}{h}\int_{0}^{h-x}\varphi(t)dt + \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{h+x}\varphi(t)dt$, если $x\epsilon[0,h]$.

$\tilde{S_h}\varphi = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\varphi(t)dt$, если $x\epsilon[h,1-h]$

$\tilde{S_h}\varphi = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{2-x-h}\varphi(t)dt + \frac{1}{h}\int_{2-x-h}^{1}\varphi(t)dt$, если $x\epsilon[1-h,1]$

Пусть x=h, $\frac{1}{2h}\int_{0}^{2h}\varphi dt$, функция не рвется, и так же она непрерывна в точке x=1-h.

Пусть x=1-h, $\tilde{S_h}\varphi = \frac{1}{2h}\int_{1-2h}^{1}\varphi dt$,

$$\left\|\tilde{S_h}f_\delta - f\right\|_{C[0,1]} \leq {}^{+}_{-}\tilde{S_h}f \ ,$$

$$\left\|\tilde{S_h}f_\delta - f\right\|_{C[0,1]} \leq {}^{+}_{-}\tilde{S_h}f \leq \left\|\tilde{S_h}f_\delta - \tilde{S_h}f\right\|_{C} + \left\|\tilde{S_h}f - f\right\|_{C},$$

$$\left\| \tilde{S}_h f_\delta - \tilde{S}_h f \right\|_C = \left\| \tilde{S}_h (f_\delta - f) \right\|_C$$

Под нормой оператора А мы понимаем:

$$\|A\| = \sup\|Af\|: \|f\| = 1$$

Если $A \epsilon (L_2[0,1] \to C[0,1])$

$$\|A\|_{L_2 \to C} = sup_{\|f\|=1} \|Af\|_C$$

$$\|A\|_{L_2 \to C} = \sup max \|Af\|, \sqrt{\int_0^1 f^2 dt} = 1.$$

Таким образом, $\tilde{S}_h$ – интегральный оператор.

Запишем его в виде:

$$\tilde{S}_h f = \int_0^1 K_h(x,t) f(t) dt \quad x\epsilon[0,h]$$, где:

$$K_h(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, 0 \le t \le h - x \\ \frac{1}{2h}, \ h - x < t \le h + x \\ 0, \text{ если } h - x < t \le 1 \end{cases} \text{, если } x\epsilon[0,h]$$

Пусть $x\epsilon[h, 1-h]$:

$$K_h(\text{x,t})=\begin{cases}\frac{1}{2h}, x-h \le t \le h+x \\ 0,\ \text{если } 0 \le t \le 1\end{cases}$$

Пусть $x\epsilon[1-h, 1]$:

$$K_h(\text{x,t})=\begin{cases}0, \text{если } 0 \le t \le h-x \\ \frac{1}{2h},\ x-h < t \le 1-x-h \\ \frac{1}{h},\ 1-x-h < t \le 1\end{cases}$$

Пусть А-интегральный оператор, действующий из $\mathrm{C}[0,1] \to C[0,1]$,

то справедливы следующие формулы:

$$Af = \int_0^1 k(x,t)\, f(t)dt$$

$$\|A\|_{C\to C} = max \int_0^1 |k(x,t)|dt$$

$$\|A\|_{L_2 \to L_2} \le \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 k^2(x,t)dtdx}.$$

Во втором разделе « Выбор параметра регуляризации» рассмотрены методы регуляризации и показаны основные алгоритмы выбора параметра для данных методов.

Широко распространенным приемом решения линейных операторных уравнений I рода является сведение их к системе линейных алгебраических уравнений(с.л.а.у.). Некорректность исходной задачи делает в общем случае эту с.л.а.у. вырожденной или плохо обусловленной. Такие системы необходимо решать с применением устойчивых методов (регуляризирующих алгоритмов), среди которых наиболее удобен метод А.Н.Тихонова. Его использование и ведет к возникновению рассматриваемой нами проблемы выбора параметра регуляризации α.

Основной конструкцией метода Тихонова, который часто называют еще методом стабилизации, как и в случае решения абстрактного уравнения первого рода, является сглаживающая функция (функционал) или функция Тихонова $T_\delta^\alpha(z) \equiv f_\delta(z) + \alpha\|z\|^2$, $z \in D$, где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Слагаемое $\alpha\|z\|^2$, как и ранее, носит название стабилизирующего слагаемого. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации $T_\delta^\alpha(z) \to \inf$, $z \in D$. Для приближенного решения этой задачи могут использоваться различные численные методы. Предположим, что в результате конечного числа итераций одного из таких методов (это число свое для каждого δ) в нашем распоряжении имеется точка $z_{\delta,\varepsilon}^\alpha$ такая, что $T_\delta^\alpha \equiv \min_{z \in D} T_\delta^\alpha(z) \leqslant T_\delta^\alpha(z_{\delta,\varepsilon}^\alpha) \leqslant T_\delta^\alpha + \varepsilon$, где величина $\varepsilon > 0$ характеризует точность решения задачи минимизации. Следует сказать, что, вообще говоря, задача минимизации при каждой фиксированной паре δ, α обладает, как правило, значительно большим “запасом устойчивости” нежели исходная задача и в огромном числе случаев является корректно поставленной. Однако, тот факт, что задача минимизации обладает большим “запасом устойчивости”, чем исходная задача, сам по себе еще не гарантирует того, что элементы $z_{\delta,\varepsilon}^\alpha$, определяемые соотношениями, будут сходиться в метрике гильбертова пространства Z. Это связано с тем, что, очевидно, чем меньше значение параметра α, тем меньше стабилизирующее слагаемое $\alpha\|z\|^2$ и одновременно тем меньше “запас устойчивости” задачи минимизации. Оказывается, для получения элементов $z_{\delta,\varepsilon}^\alpha$ таких, что при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$ они сходятся ко множеству D_*, уменьшение “запаса устойчивости” следует компенсировать согласованным изменением величин α, ε и величины δ, характеризующей ошибку исходных данных. Ошибка в выборе α, ε может привести к тому, что даже в самых простейших ситуациях элементы z δ, ε α не будут сходиться ко множеству D∗ при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Также рассмотрены следующие правила выбора параметра регуляризации:

1. Критерий квазиоптимальности: В качестве параметра $\alpha(u_\delta)$ выбирается наименьшее из значений $\alpha \geq 0$, реализующих локальный минимум функции $\Psi(\alpha) = \| \alpha(dz^\alpha/d\alpha) \|^2$.
2. Критерий отношения: Параметр $\alpha(u_\delta)$ определяется как наименьшее из значений $\alpha \geq 0$, в которых достигается локальный минимум функций $\xi(\alpha)$.

В разделе численного эксперимента представлено 2 подпункта:

1.«Моделирования функции, заданной с погрешностью»

Для проведения численного эксперимента приведен алгоритм моделирования функции $f_\delta(x)$ по точно заданной $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C[0,1]$ и δ некоторое число из отрезка [0,1]. Построена функция $\tilde{f}_\delta(x)$ такую, что: $\|f\delta(x) - f(x)\| \leq \delta$ на $L_2[0,1]$. Будем разбивать отрезок [0,1] на m частей и рассматривать узлы x_i, где $i=0,\dots,m$.

2. «Численный эксперимент по решению задачи восстановления функции при различных способах выбора параметра с помощью оператора S_h».

Заключение

В работе был изучен предмет некорректно поставленной задачи восстановления непрерывной функции на заданном приближении в пространстве $L_2[a,b]$, приведены два метода решения этой задачи с помощью операторов Sh, $\tilde{Sh}$. Также были изучены методы регуляризации некорректных задач, рассмотрен вопрос выбора параметра в задаче восстановления функции.

Приведены теоретические обоснования предлагаемых решений.
Также выполнены численные эксперименты, наглядно показывающие практическую ценность и удобство данных методов.
В приложении приводится пример программы на высокоуровневом языке программирования C++ и результаты численного эксперимента по выбору параметра регуляризации.