Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Восстановление дифференциальных операторов
название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом
ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Игнатьева Алексея Александровича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов, 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их некоторым спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаметальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в различных областях естествознания и техники, в частности, в квантовой физике, механике, электротехнике, геофизике, метеорологии. Интерес к этой тематике постоянно увеличивается благодаря появлению новых приложений, и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Первый результат в теории обратных спектральных задач оператора принадлежит В. А. Амбарцумяну. Он показал что в одном частном случае оператор Штурма-Лиувилля однозначно определяется своим спектром. Однако результат Амбарцумяна является исключением, и одного спектра, вообще говоря, недостаточно. Впоследствии Г. Борг доказал, что оператор Штурма-Лиувилля однозначно определяется двумя спектрами.

Важную роль в теории спектральных задач Штурма-Лиувилля сыграл оператор преобразовния. В первые для произвольного оператора Штурма-Лиувилля его построил А. Я. Повзнер, а первым к решению обратных спектральных задач стал применять В. А. Марченко. Позже метод оператора преобразования использовался в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, в которой были получены необходимые и достаточные условия восстновления оператора Штурма-Лиувилля, а также сам метод восстановления.

Целью бакалаврской работы являет построение алгоритма восстановления дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями третьего рода на конечном интервале.

Работа состоит из пяти разделов: «Основные определения», «Свойства спектра и собственных функций», «Оператор перобразования», «Теорема единственности», «Метод оператора преобразования».

В разделе «Основные определения» вводятся основные объекты, используемые в работе, такие как оператор Штурма-Лиувилля, собственные значения и собственные функций, весовые числа.

В разделе «Свойства спектра и собственных функций» рассматриваются прямые задачи спектрального анализа. В ней получены теоремы об основных свойствах спектра и собственных функций, в частности, доказаны теоремы о существовании и асимптотическом поведении собственных значений и весовых чисел, а также полноте и ортогональности в L_2 системы собственных функций.

В разделе «Оператор преобразования» производится построение оператора преобразования и изучаются его свойств.

В разделе «Теорема единственности» доказывается теорема о единственности восстановления дифференциального оператора по спектральным данным.

В разделе «Метод оператора преобразования» выводится основное уравнение обратной задачи, а также доказывается его однозначная разрешимость. Это уравнение является линейным интегральным уравнением относительно ядра оператора преобразования. С его помощью, сводя нелинейную обратную задачу к линейной, доказаваются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи восстановления, а также строится алгоритм восстановления дифференциального оператора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе вводятся основные объекты, которые используются в работе.

Определение 1. *Краевая задача $L = L(q(x), h, H)$:*

$$ly(x) = -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$, h, $H \in \mathbb{R}$ и $q(x) \in L_2(0, \pi)$, называется краевой задачей Штурма-Лиувиля.

Определение 2. *Значения параметра λ, для которых L имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения собтенными функциями.*

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ решения (1), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h,$$

$$\psi(\pi,\lambda)=1,\quad \psi'(\pi,\lambda)=-H.$$

Согласно формуле Остроградского-Лиувилля вронскиан

$$\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\rangle=\langle\psi(x_0,\lambda),\varphi(x_0,\lambda)\rangle\exp\left(-\int_{x_0}^{x}0\,dt\right)=\langle\psi(x_0,\lambda),\varphi(x_0,\lambda)\rangle$$

и не зависит от x.

Определение 3. *Функция*

$$\Delta(\lambda)=\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\rangle$$

называется характеристической функцией краевой задачи L.

Определение 4. *Числа*

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)\,dx,$$

где λ_n — собственные значения L, называются весовыми числами.

Во втором разделе доказываются теоремы об основных свойствах спектра и собственных функций.

Теорема 1. *Нули характеристической функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_n\}$ краевой задачи L. Функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ являются собственными функциями, и существует последовательность $\{\beta_n\}$, что*

$$\psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n).$$

Теорема 2. *Собственные значения $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\varphi(x,\lambda_n)$, $\psi(x,\lambda_n)$ — вещественны. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(0,\pi)$. Все нули $\Delta(\lambda)$ являются простыми, т. е. $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$.*

Лемма 1. *При $|\rho|\to\infty$ верны следующее равномерные по $x\in[0,\pi]$ асимптотические формулы:*

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+q_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int_0^x\frac{\sin\rho(x-2t)}{2\rho}q(t)\,dt+O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right),\quad(3)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = \rho\sin\rho x + q_1(x)\cos\rho x + \frac{1}{2}\int_0^x \cos\rho(x-2t)\,q(t)\,dt + \\ + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\right), \quad (4)$$

где

$$q_1(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt$$

и $\lambda = \rho^2$.

Теорема 3. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$. При этом*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda}_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad n\to\infty, \quad (5)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad n\to\infty, \quad (6)$$

где

$$\{\kappa_n\} \in l_2.$$

Лемма 2. *Если $q(x) \in W_2^1(0,\pi)$, то при $|\rho|\to\infty$ верны следующие равномерные по $x\in[0,\pi]$ асимптотические формулы:*

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + q_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + q_{21}(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^2} - \int_0^x \frac{\cos\rho(x-2t)}{4\rho^2}q'(t)\,dt + \\ + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^3}\right), \quad (7)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + q_1(x)\cos\rho x + q_{22}(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-2t)}{4\rho}q'(t)\,dt + \\ + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right), \quad (8)$$

где

$$q_{21} = \frac{q(x)-q(0)}{4} + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)q_1(t)\,dt,$$

$$q_{22}(x) = \frac{q(x)+q(0)}{4} + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)q_1(t)\,dt.$$

Теорема 4. *Если $q(x) \in W_2^1(0,\pi)$, то кравевая задача L имеет счетное* *множетсво собственных значений. При этом*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n^2}, \quad n \to \infty, \tag{9}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega^+}{n^2} + \frac{\kappa_n}{n^2}, \quad n \to \infty, \tag{10}$$

где

$$\{\kappa_n\} \in l_2.$$

Теорема 5. *Система собственных функций* $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *полна в* $L_2(0, \pi)$. *Кроме того, если* $f(x) \in AC(0, \pi)$, *то*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x, \lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi(t, \lambda_n)\, dt,$$

при чем ряд сходится равномерно на $[0, \pi]$.

В теретьем разделе строится оператор преобразования, и доказываются его основные свойства.

Теорема 6. *Имеет место предстваление*

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x G(x, t) \cos \rho t\, dt, \quad \lambda = \rho^2, \tag{11}$$

где $G(x, \lambda)$ *— вещественная непрерывная функция, причем*

$$G(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t)\, dt.$$

В четвертом разделе доказывается теорема единственности восстановления дифференциального оператора.

Теорема 7. *Если* $\forall\, n > 0$ $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$, *то* $L = \tilde{L}$, *т. е.* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *почти всюду на* $(0, \pi)$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$.

В пятом разделе доказываются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи восстановления дифференциального оператора, а также строится алгоритм решения этой задачи.

Обозначим

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n}-\frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}\right), \tag{12}$$

где

$$\alpha_n^0=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n>0,\\ \pi, & n=0.\end{cases}$$

Теорема 8. *$\forall x\in(0,\pi]$ ядро $G(x,t)$ из представления (11) удовлетворяет линейному интегральному уравнению*

$$G(x,t)+F(x,t)+\int_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds=0,\quad 0<t<x. \tag{13}$$

Теорема 9. *$\forall x\in(0,\pi]$ уравнение (13) имеет единственное решение $G(x,t)$ в $L_2(0,\pi)$.*

Алгоритм 1. *Пусть даны числа $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ вида (5), (6). Тогда краевая задача $L(q(x),h,H)$ строится по следующему алгоритму:*

1. *По заданным числам $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ строим функцию $F(x,t)$ по формуле (12);*

2. *Находим функцию $G(x,t)$ из уравнения (13);*

3. *Вычисляем $q(x)$, h и H по формулам*

$$q(x)=2\frac{d}{dx}G(x,x), \tag{14}$$

$$h=G(0,0),\quad H=\omega-h-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\,dt. \tag{15}$$

Пусть $G(x,t)$ — решение уравнение (13), $\tilde{\varphi}(x,t)$ построена по формуле (11), $q(x)$ и h — по формулам (14), (15).

Лемма 3. *Справедливы соотношения:*

$$-\tilde{\varphi}''(x,\lambda)+q(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\lambda\tilde{\varphi}(x,\lambda),$$

$$\tilde{\varphi}(0,\lambda)=1,\quad \tilde{\varphi}'(0,\lambda)=h.$$

Лемма 4. *Справедливо соотношение:*

$$\int_0^\pi \tilde{\varphi}(t, \lambda_k)\tilde{\varphi}(t, \lambda_n) = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \alpha_n, & n = k. \end{cases}$$

Лемма 5. $\forall\, n, m \geqslant 0$ *имеет место равенство:*

$$\frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n)}{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n)} = \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_m)}{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_m)}$$

Теорема 10. *Для того, чтобы вещественные числа* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *были спектральными данными для некоторой задачи* $L(q(x), h, H)$ *вида* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (5), (6). *Кроме того, если* $q(x) \in \in W_2^1$, *то необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (9), (10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи восстановления оператора Штурма-Лиувилля, доказана единственность решения этой задачи, а также построен алгоритм восстановления, который является основным результатом работы.

Кроме того, были рассмотрены некоторые прямые задачи спектрального анализа. В частности, были доказаны теоремы о существовании и асимптотическом поведении собсетвенных значений и весовых чисел, а также о полноте и ортональности в L_2 системы собственных функций.