Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

Решение задачи Марковица с условием на кардинальность в среде MATLAB на основе применения метода Монте-Карло.

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

Студентки 6 курса 641 группы
направления (специальности) 080801 «Прикладная информатика в экономике»

код и наименование направления (специальности)

механико – математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Киргизбаевой Альбины Муртазаевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
Доцент, к.э.н., доцент ____________________ А.М. Варюхин
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
профессор, д.ф-м.н., профессор ____________________ С. И. Дудов
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

Введение

Актуальность темы, объект и предмет работы. Инвестиции одна из основных движущих сил развития экономики, как на уровне целых стран, так и отдельных субъектов рынка – корпораций, компаний и предпринимателей. Поэтому, инвестор один из важнейших субъектов, детерминирующих экономическую жизнь современного общества. Повышение эффективности принимаемых инвестиционных решений в условиях неопределенности и большого масштаба рынка ценных бумаг (число ценных бумаг, циркулирующих на рынке, измеряется тысячами) с необходимостью требует постоянного развития методов и моделей, описывающих инвестиционный выбор.

Таким образом, в качестве *объекта* исследования рассматривается инвестор, а *предметом* является инвестиционный выбор, который в течение заданного периода принесёт обладателю портфеля наилучший (оптимальный) результат. Формально это обеспечивается путем нахождения экстремума определенной целевой функции при соответствующих ограничениях.

Цели и задачи. В дипломной работе делается попытка развития классической математической модели Марковица, описывающей деятельность портфельного инвестора, с учетом неопределенности и его предпочтений

Основными задачами работы являются совершенствование математической постановки задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг Марковица, которая обеспечивает максимизацию ожидаемой доходности портфеля (минимизацию риска) при ограничениях на уровень риска (доходности) и число выбираемых ценных бумаг (кардинальность) и разработка информационно-программных средств решения этой задачи.

Краткая характеристика материалов исследования. В качестве исходных реальная ретроспективная информация о доходности 32 ценных бумаг за 290 периодов времени. Для решения поставленных задач использовались: методология системного подхода, абстрактно-логический подход, статистико-экономический анализ, математические методы оптимизации и монографические методы исследования.

О*писание структуры работы.* Дипломная работа состоит из ведения, трех основных глав, заключения, списка используемых источников и приложений. Основной текс работы изложен на страницах машинописного текста, содержит таблицы, рисунков, 3 приложения. Список использованных источников включает источников.

Глава 1. Классическая модель портфеля ценных бумаг Марковица.

Глава 2 Задача Марковица с ограничением на кардинальность.

Глава 3 Решение задачи Марковица с различными ограничениями в среде MatLab

Формулировки научной новизны, научной значимости работы. Полученные в работе результаты имеют теоретическую и практическую ценность. Впервые для решения задачи Марковица с ограничением на кардинальность использован наряду с традиционными методами оптимизации применяется статистический метод Монте-Карло. Это открывает большие возможности автоматизации поиска оптимального портфеля ценных бумаг заданной размерности при использовании информации обо всех ценных бумагах, циркулирующих на соответствующем рынке. Проведенные исследования показали возможность и целесообразность использования предложенного подхода к решению указанной выше задачи достаточно большой размерности. Это дает право предлагать разработанный в данной работе на базе MATLAB информационно-программный инструментарий в качестве инструмента для практической деятельности портфельного инвестора.

Основное содержание работы.

Классическая портфельная теория Марковица построена на ряде постулатов, которые позволяют рассматривать рынок ценных бумаг как многомерное вероятностное пространство:

$$\langle A, m, C \rangle, \quad (1)$$

где $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ - конечный набор активов, составляющих рынок;

m= $\{m_1, m_2, \dots m_n\}$ - вектор ожидаемых доходностей, т.е. $m_i = E[R_i] -$ математическое ожидание случайной величины R_i, представляющей доходность актива R_i за выбранный инвестиционный период Т;

$C = (c_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}^{n} -$ ковариационная матрица порядка n;

$c_{i,j} = cov(R_i, R_j)$ –ковариация случайных величин R_i, R_j, в случае $i = j$: $c_{i,j} = V[R_i] = \sigma_i^2$,т. е. диагональные элементы $c_{i,i}$ задают дисперсию активов (риск).

В этом пространстве Марковец формально поставил прямую и обратную задачу нахождения оптимального портфеля ценных бумаг. Пусть необходимо сформировать портфель из n ценных бумаг. Известен вектор ожидаемых доходностей $m = \{m_1, m_2, \dots m_n\}$ и ковариационная матрица $C = (c_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}^{n}$, тогда прямая задача Марковица в матричной форме имеет вид:

$$E(r) = x^T \cdot m \to max, \quad (2)$$

$$\sigma_p^2 = x^T \cdot C \cdot x \leq \sigma_{\text{огр}}, \quad (3)$$

$$x^T \cdot e = 1, \quad (4)$$

$$x_i \geq 0\,, i = \overline{1,n}, \quad (5)$$

Где e – единичный вектор размерности n;

x = $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ искомый весовой вектор, характеризующий оптимальный портфель, максимизируюший доходность при уровне риска не больше заданного значения $\sigma_{\text{огр}}$.

Обратная задача имеет следующий вид:

$$\sigma_p^2 = x^T \cdot C \cdot x \to min, (6)$$

$$E(r) = x^T \cdot m \geq r_{\text{огр}}, (7)$$

$$x^T \cdot e = 1, (8)$$

$$x_i \geq 0\ , i = \overline{1, n}. (9)$$

Здесь ищется портфель минимизирующий риск при заданном уровне $r_{\text{огр}}$ доходности.

В этих задачах ограничения 4-5 и 8-9 носят очевидный технологический характер. Ограничения 3 и 7 могут быть строгим равенством, строгим неравенством и нестрогим неравенством.

Но в такой классической постановке число активов, включаемых в портфель, принималось равным размерности рынка ценных бумаг. С развитием этого рынка размерность задачи становилась все больше (сотни переменных), а получаемый оптимальный портфель ценных бумаг за счет включения в него огромного числа активов становился все более сложным для администрирования. Выход из этой ситуации инвесторы увидели в определении оптимального портфеля с фиксированным количеством активов, составляющих относительно небольшую долю финансового рынка. Формально это приводит к постановке задачи Марковица с дополнительным ограничением на кардинальность.

Постановка обратной задачи Марковица с ограничением на кардинальность без учета коррелированности активов в портфеле имеет следующий вид:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{\text{K}} x(i)^2 \cdot (\sum_{j=1}^{\text{T}} \frac{(r(i,j) - (\sum_{J=1}^{T} \frac{r(i,j)}{T})^2}{\text{T}}) \to min\ (10)$$

Необходимо найти (10) при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{K} x(i) = 1\ , \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{J=1}^{T} \frac{r(i,j)}{T} \right) \cdot x(i)\ \geq \boldsymbol{r}_{\text{огр}}\ , \tag{12}$$

$$\beta(i) \cdot a(i) \leq x(i) \leq \beta(i) \cdot b(i), i = \overline{1, N}\ , \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta(i) = K, \tag{14}$$

$$\beta(i) = 0\ or\ 1\ , i = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Здесь:

K=<N-число акций в портфеле;

N –максимальное число акций, которые могут быть включены в портфель;

$\boldsymbol{R} = \|r(i,j)\|^{NX\,T}$- матрица доходности;

$x(i)\ , i = 1, K$- доля i-ой акции в портфеле.

$a(i) \geq 0, b(i) \leq 1\ , i = \overline{1, N}$ - нижние и верхние границы инвестиций в ценные бумаги;

$\beta(i) = 0\ or\ 1, i = \overline{1, N}$ - кардинальные переменные.

Если учитывать коррелированность активов в портфеле, то целевую функцию (10) нужно заменить на целевую функцию (6).

Решение этой задачи может осуществляться следующим образом:

- организуется процесс генерации полного или статистически достаточного множества векторов номеров ценных бумаг размерности K<=N. (мощность этого множества - число сочетаний $\leq\ C_N^K$);

- для каждого элемента этого множества решается задача поиска оптимального портфеля;

-все полученные результаты решений сравниваются друг с другом по целевой функции (риску), решение имеющее минимальное значение целевой функции - есть искомый оптимум.

Локальную оптимизацию можно осуществлять, используя алгоритмы, которые относятся к регулярным и эвристическим методам поиска экстремума.

Используя эти методы, можно решить задачу нахождения оптимального портфеля ценных бумаг в некоторой точке $B_l \in B$,

где $B_l = \{\beta_l(1), \ldots\ldots, \beta_l(N))\}$, $\beta_l(i) = 0\ or\ 1\ , i = \overline{1, N}$ и $\sum_{i=1}^{N} \beta_l(i) = K$.

Таким образом, в результате решения оптимизационной задачи находится локальный оптимум в точке B_l K - мерного пространства B. Для того, чтобы гарантированно найти глобальный оптимум, необходимо перебрать все точки пространства B, в каждой из них решить оптимизационную задачу и выбрать точку с наилучшим значением целевой функции.

Так как практически перебрать все точки B_l невозможно, то используем метод Монте-Карло для нахождения глобального минимума целевой функции в задаче (10)-(15):

1. Генерируем с помощью какого-либо программного генератора равномерно распределенных случайных чисел, случайный вектор $B_l \in B$, $l = 1$.
2. Решаем оптимизационную задачу (10) - (15) в точке B_l - вычисляем значения функции (10) $\sigma_p^{2^{min}} = \sigma_{p_l}^2$ в этой точке.
3. Полагаем $l = 2$.
4. Аналогично п. 1) генерируем случайный вектор $B_l \in B$.
5. Решаем оптимизационную задачу (10) - (15) в точке B_l - вычисляем значения функции (10) $\sigma_{p_l}^2$ в этой точке
6. Если $\sigma_{p_l}^2 < \sigma_p^{2^{min}}$, то выполняем присваивания $\sigma_p^{2^{min}} = \sigma_{p_l}^2$
7. Если $l < M$, то выполняем присваивание $l = l + 1$ и переходим на п. 4). Иначе - заканчиваем вычисления. Здесь M -количество статистических испытаний.
8. Принимаем решение задачи (10)-(15) в точке B_l в качестве приближенного значения глобального минимума функции (10) σ_p^2 .

Для решения обратной задачи Марковица (6)-(9) в среде MatLab воспользуемся следующими алгоритмами оптимизации: квадратичным, fmincon, генетическим и поиска по образцам.

Результаты решения сравним по полученному оптимальному значению риска и ожидаемой доходности оптимального портфеля. Исходными данными является матрица доходностей 32 ценных бумаг за 290 дней. Будем решать обратную задачу Марковица при ограничении (12) на доходность портфеля: $E(r) = x^T \cdot m >= r_{\text{огр}} = 1.004$.

Результаты решения обратной задачи Марковица с ограничением на доходность в виде нестрогого неравенства с помощью различных алгоритмов в среде MatLab приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Решения обратной задачи Марковица разными алгоритмами оптимизации при ограничении на доходность- нестрогое неравенство

Номера активов	Квадратичный алгоритм	Генетический алгоритм	Алгоритм поиска по образцам	Алгоритм fincon
1	0	0.3935	0.3635	0.03
2	0	0.0228	0	0.0158
3	0.0162	0.019	0.1837	0.0508
4	0	0.0283	0	0.0007
5	0	0.0129	0	0
6	0	0.0189	0	0
7	0.0822	0.0198	0.1445	0.0673
8	0	0.012	0	0
9	0	0.0258	0.001	0.022
10	0.2977	0.0231	0.1406	0.1478
11	0.0116	0.0108	0	0.0324
12	0.0526	0.0228	0.0156	0.0685
13	0	0.0217	0	0
14	0	0.0185	0	0
15	0.0842	0.0313	0	0.0819
16	0.1007	0.0273	0.151	0.0689
17	0	0.0106	0	0
18	0.03	0.023	0	0.0665
19	0	0.0222	0	0
20	0	0.0205	0	0
21	0	0.0246	0	0.0159
22	0	0.0172	0	0
23	0	0.0243	0	0.0528
24	0.1527	0.0273	0	0.1159
25	0	0.0129	0	0.0199
26	0	0.0227	0	0
27	0.0327	0.0183	0	0.0589
28	0	0.0176	0	0.0005
29	0.123	0.0239	0	0.0694
30	0.0165	0.0002	0	0.0141
31	0	0.0143	0	0
32	0	0.0109	0	0

Анализ качества полученных решений (таблица 2) показывает, что наилучшие результаты дает **квадратичный алгоритм**, максимально приспособленный к виду целевой функции. Близкие результаты по всем качественным характеристикам дает алгоритм fmincon, но особенно интересно, что эвристический алгоритм поиска по образцам дал решение, превосходящее все остальные алгоритмы по уровню доходности портфеля.

Таблица 2 - Сравнение качества решений обратной задачи Марковица с ограничением на доходность нестрогое неравенство различными методами оптимизации

Характеристики решения	Квадратичный алгоритм	Генетический алгоритм	Алгоритм поиска по образцам	Алгоритм fmincon
Значение риска	0.0180	0.0232	0.0207	0.0188
Отклонение риска от наилучшего значения (%)	0.00	28.90	15.00	4.44
Значение доходности	1.0040	1.0040	1.0046	1.0040
Отклонение доходности от наилучшего значения(%)	0.060	0.060	0.000	0.060
Время решения (сек)	1.2485	15.8291	10.2949	3.7727
Отклонение времени решения от наилучшего значения(%)	0.00	1167.85	724.58	202.18

Поэтому, при решении обратной задачи Марковица с ограничением на кардинальность и доходность с учетом коррелированности активов (в задаче (10)-(15) целевая функция (10) заменена на (6)) методом Монте-Карло точки перебора, представляющие собой результаты решения соответствующих локальных задач оптимизации, будем искать, используя квадратичный алгоритм. Результаты решения данной задачи при разных уровнях кардинальности в среде MatLab представлены в таблице 3.

Разработанные программы позволяют исследовать, как влияет уровень кардинальности портфеля на статистические свойства решения (рис.1, рис.2)

Таблица 3 - Решения обратной задачи Марковица с ограничением на доходность при разных уровнях кардинальности (квадратичный алгоритм, число реализаций =900).

Номера активов	x при К=8	x при К=16	x при К=24
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0.0296	0.0162
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0.0889	0.0822
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0.3214	0.2985	0.2977
11	0	0	0.0116
12	0	0.056	0.0526
13	0	0	0
14	0	0	0
15	0.0915	0.0872	0.0842
16	0.2174	0.1186	0.1007
17	0	0	0
18	0	0.0294	0.03
19	0	0	0
20	0	0	0
21	0	0	0
22	0	0	0
23	0	0	0
24	0.1764	0.1522	0.1527
25	0	0	0
26	0	0	0
27	0	0	0.0327
28	0	0	0
29	0.1933	0.1189	0.123
30	0	0.0208	0.0165
31	0	0	0
32	0	0	0
Время решения (сек)	158	134	112

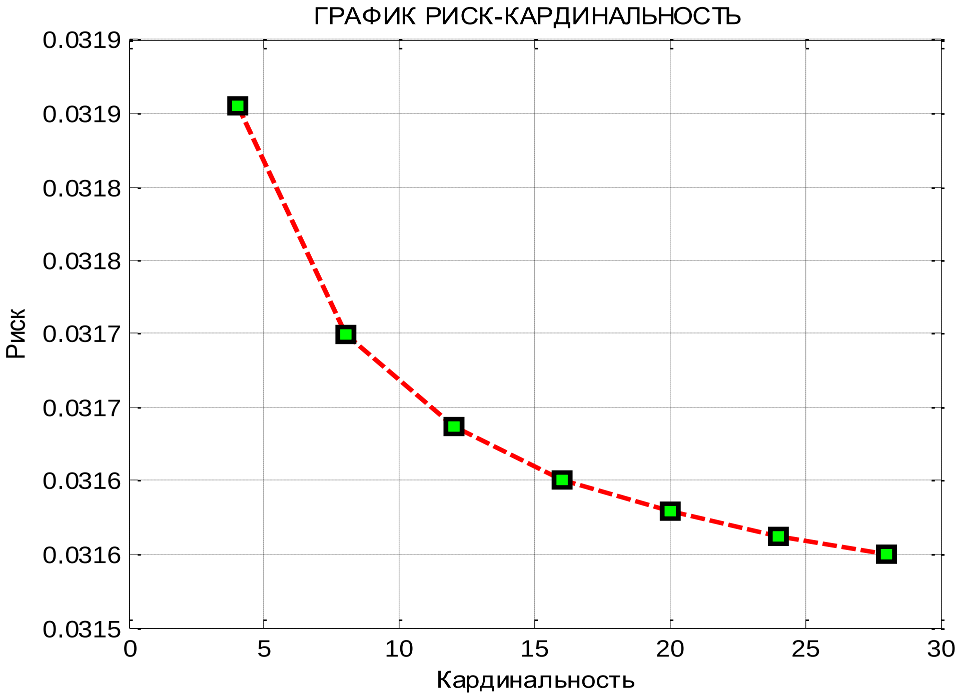

Рисунок 14 - Зависимость среднего риска от уровня кардинальности (квадратичный алгоритм).

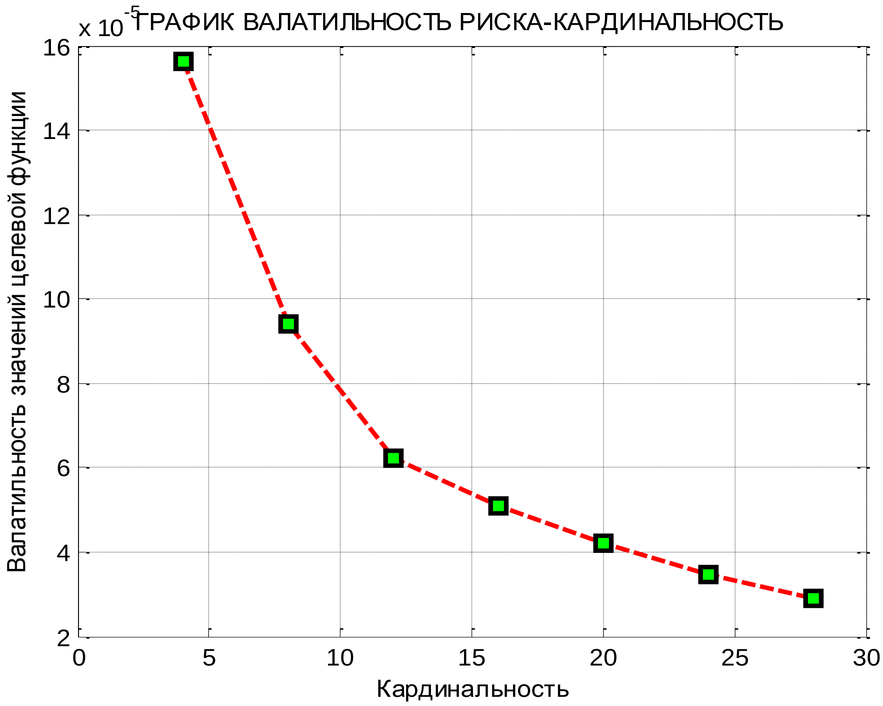

Рисунок 15 - Зависимость СКО риска от уровня кардинальности (квадратичный алгоритм)

Из рисунков видно, что средний риск и его валатильность монотонно падают с ростом уровня кардинальности, стремясь к некоторому минимальному значению (это соответствует общетеоретическим соображениям).

Заключение

Работа посвящена вопросам совершенствования информационно-аналитического обеспечения деятельности инвестора на рынке ценных бумаг. В процессе выполнения данной работы были решены следующие теоретические и практические задачи:

- сформулированы и проанализированы основные теоретические постулаты, лежащие в основе классической задачи об оптимальном портфеле Марковица;
- сформулирована содержательно и формально обратная задача Марковица с ограничениями на ожидаемую доходность и кардинальность;
- разработан алгоритм совместного использования методов локальной оптимизации (генетический алгоритм, алгоритм поиска по образцам, квадратичный, fmincon) и метода Монте-Карло для решения поставленной оптимизационной задачи;
- разработаны в среде MATLAB программы решения обратной задачи Марковица с разными типами ограничений на доходность и ограничением на кардинальность, как без использования информации о корреляции активов, так и с ее использованием;
- проведены практические расчеты по определению оптимального портфеля ценных бумаг с использованием разработанного программно-аналитического инструментария, осуществлено исследование влияния кардинальности на статистические параметры оптимального портфеля.

Полученные результаты демонстрируют теоретическую обоснованность и практическую ценность разработанного информационно- программного инструментария и позволяют на его основе повысить качество стратегии, реализуемой инвестором на финансовом рынке.