Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

# Влияние мультипликативного шума на статистику времён возврата Пуанкаре

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 — Радиофизика
физического факультета
Никулина Никиты Олеговича

Научный руководитель
засл. деятель науки РФ,
доктор физ.-мат. наук, профессор ____________________ Анищенко В.С.

Заведующий кафедрой
засл. деятель науки РФ,
доктор физ.-мат. наук, профессор ____________________ Анищенко В.С.

Саратов 2016

# ВВЕДЕНИЕ

Возврат Пуанкаре является одной из фундаментальных особенностей временной эволюции динамических систем. Возврат по Пуанкаре означает, что почти любая фазовая траектория, исходящая из любой точки $x_0$ фазового пространства, бесконечное число раз пройдёт сколь угодно близко от начального состояния. [1, 2].

К настоящему времени разработана фундаментальная математическая теория, описывающая статистику времён возвратов как в окрестность заданного начального состояния [2](так называемый локальный подход), так и в рассматриваемое множество фазового пространства системы [3] (глобальный подход). В работе [4] приводятся доказательства ряда теорем, обобщающих классические и усиливающих классические результаты Пуанкаре [1, 2]. В работах [5, 6] теоретически доказано, что плотность распределения случайной последовательности времён возврата в окрестность начального состояния подчиняется экспоненциальному закону. В работах [7] доказан важный результат о взаимосвязи среднего времени возврата с вероятностью пребывания фазовой траектории в $\varepsilon$-окрестность заданного начального состояния (теорема Каца, локальный подход). Результат Пуанкаре [1, 2] обобщён Н.Г. Четаевым для случая, в котором правые части обыкновенных дифференциальных уравнений динамической системы периодические относительно времени [8]. Также стоит отметить, что в последнее время был успешно развит метод рекуррентных диаграмм, который, по сути, основывается на концепции возвратов Пуанкаре [9, 10].

Недавно были рассмотрены работы, в которых рассматривается новый подход к проблеме возвратов Пуанкаре [11–13]. Здесь анализируется среднее время возвратов Пуанкаре по всем элементам покрытия аттрактора. Среднее время возврата в этом случае зависит от совокупности начальных точек, задаваемых в каждом из элементов покрытия множества, и является функцией всего рассматриваемого множества. Одну из основных характеристик возвратов Пуанкаре при глобальном подходе представляет собой фрактальная размерность множества времен возврата, назаннная в работах [14, 15] размерностью Афраймовича-Песина (АП-размерность).

Указанные выше работы в основном представляют собой строгие математические результаты, которые полагаются в основу многих экспериментальных исследований по численному моделированию статистики возвратов Пуанкаре для конкретных систем. Нас будут интересовать работы по анализу статистики возвратов Пуанкаре в малоразмерных дискретных диссипативных системах с хаотическим аттрактором [16–18]. Хаотические системы характеризуются устойчивостью по Пуассону и вследствие наличия перемешивания являются эргодическими. Это дает основание использовать математические результаты для анализа результатов вычислительного эксперимента.

Не смотря на то, что имеется достаточно большое количество работ по исследованию времён возврата Пуанкаре, многие вопросы не до конца изучены. Например, вызывает интерес анализ времён возврата в системах при наличии шумового воздействия, в частности, поведение численной характеристики времён возврата Пуанкаре, размерности Афраймовича-Песина. В дипломной работе исследуются времена возврата Пуанкаре в кубическом отображении в присутствии мультипликативного шума.

## Основное содержание работы

В первой главе дипломной работы представлен краткий теоретический обзор математической теории, описывающей поведение времён возврата Пуанкаре. Приведена формулировка определения времени возврата Пуанкаре для дискретной системы. Представлены основные математические выражения, с помощью которых проводится мультифрактальный анализ последовательности времён возврата Пуанкаре.

**Времена возврата Пуанкаре.** Стоит начать с того, чтобы дать определение времени возврата Пуанкаре. В работе [1] Анри Пуанкаре было доказано, что для множеств с заданной вероятностной мерой почти любая фазовая траектория может вернуться в сколь угодно малую окрестность своего начального состояния.

Приведём точное математическое определение времени возврата. Время, за которое траектория вернётся в окрестность своего начального состояния, называется временем возврата Пуанкаре. Точное математическое определение времени возврата Пуанкаре для дискретной динамической системы записывается в виде:

$$\tau_r(\vec{x}_0) = \min\{n \in \mathbb{N} : T^n(\vec{x}_0) \in B_r(\vec{x}_0)\}, \tag{1}$$

где $\tau_r(\vec{x}_0)$ — это время возврата в окрестность начального состояния $\vec{x}_0$, $B_r(\vec{x}_0)$ — $\mathbb{N}$-мерный шар радиуса $r = \varepsilon/2$, $T^n(\vec{x}_0)$ — отображение метрического пространства $T : X \to X$ применённое $n$ раз к точке $\vec{x}_0$.

**Статистические характеристики времён возврата.** Как уже было сказано ранее, при исследовании времён возврата применяются два подхода: локальный и глобальный. Локальный подход предполагает изучение времён возврата в окрестности выбранного состояния динамической системы. Суть же глобального подхода состоит в следующем. Рассматриваемое множество фазовых траекторий динамической системы (например, аттрактор системы) покрывается кубами (или шарами) размером $\varepsilon \ll 1$. Покрытие должно целиком охватывать рассматриваемое множество. Для каждого элемента покрытия $\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ определяется минимальное время первого возврата фазовой траектории в $\varepsilon_i$-окрестность $\tau_{\inf}(\varepsilon_i)$. Затем находится среднее минимальное время первого возврата по всем множеству элементов покрытия $\varepsilon_i$.

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \tau_{\inf}(\varepsilon_i) \tag{2}$$

Установлено [12], что

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle = \phi^{-1}(\varepsilon^{\frac{d}{\alpha_c}}) \tag{3}$$

где $\alpha_c$ — размерность времён возврата, введённая Афраймовичем и Песиным [11, 12, 19] , $d_C$ — ёмкостная размерность аттрактора. Функция $\phi$ в (3) может быть задана в одном в одном из следующих видов:

$$\phi(t) \backsim \frac{1}{t}, \quad \phi(t) \backsim \exp(-t), \quad \phi \backsim exp(-t^2), \ ..., \tag{4}$$

что зависит от топологической энтропии системы $h_t$, а также от мультифрактальности исследуемого множества, если она имеет место. Если топологическая энтропия $h_t = 0$, то $\phi(t) \backsim \frac{1}{t}$ и из (3) следует

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle = \varepsilon^{-d/\alpha_c} \tag{5}$$

Если $h_t > 0$, то $\phi(t)$ обычно задаётся в виде экспоненты, $\phi(t) \simeq \exp(-t)$. Тогда (3) можно представить в виде

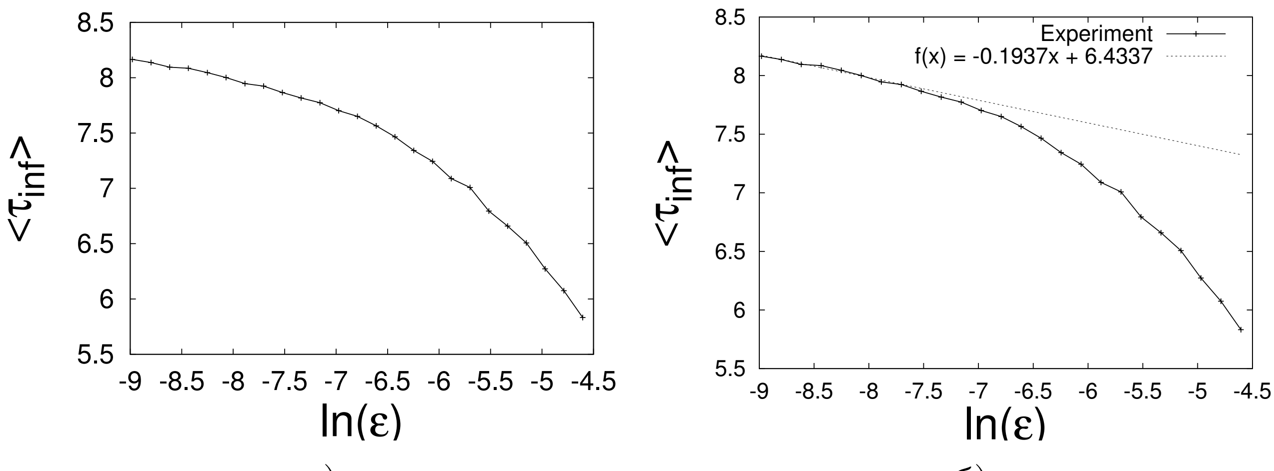
$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle \backsim -\frac{d}{\alpha_c} \ln \varepsilon \tag{6}$$

В кратком изложении результаты по проблеме возвратов Пуанкаре, используемые в настоящее время выглядят именно так.

**Времена возврата в зашумлённой системе.** Во второй главе дипломной работы представлены результаты численного моделирования статистических характеристик возвратов Пуанкаре в кубическом отображении на основе глобального подхода. Проведён анализ влияния мультипликативного шума на характеристики времён возврата. Исследуем динамику кубического отображения в присутствии мультипликативного шума:

$$x_{n+1} = [\alpha(1+\sqrt{2D}\xi_n)x_n - x_n^3]\exp(-\frac{x_n^2}{B}). \tag{7}$$

Проанализируем влияние мультипликативного шума на статистические характеристики последовательности времён возврата Пуанкаре. В качестве исследуемой характеристики выберем размерность Афраймовича-Песина $\alpha_c$. Для определения АП-размерности требуется построить зависимость среднего минимального времени возврата $\langle\tau_{\text{inf}}\rangle$ от размера области возврата $\varepsilon$. Рассчитанная нами зависимость среднего минимального времени возврата $\langle\tau_{\text{inf}}\rangle$ от размера окрестности возврата $\varepsilon$ подчиняется теоретической формуле (6), рис. 1.а. Проведём аппроксимацию полученной зависимости прямой методом наименьших квадратов рис. 1.б. Стоит отметить, что зависимость среднего




а) б)

Рисунок 1 — Зависимость среднего минимального времени возврата $\langle\tau_{\text{inf}}\rangle$ от размера области возврата $\varepsilon$ при интенсивности шума $D = 0.00355 * 10^{-5}$

минимального времени возврата $\langle\tau_{\text{inf}}\rangle$ от размера окрестности возврата $\varepsilon$ подчиняется выражению (6) лишь при малых шумах. Соответственно, значение АП-размерности можно рассчитать только при $D < 5 \cdot 10^{-4}$.

Зная значения ёмкостной размерности аттрактора $d_C = 1.0$ и модуля наклона аппроксимирующей прямой $|k|$, определим значение размерности Афраймовича-Песина $\alpha_c$ и исследуем её поведение в зависимости от интенсивности шумового воздействия

$$\alpha_c = \frac{d_C}{|k|}, \tag{8}$$

где $d_C$ — ёмкостная размерность аттрактора, $|k|$ — модуль наклона аппроксимирующей прямой. Как видно из рис. 2, с увеличением интенсивности муль-

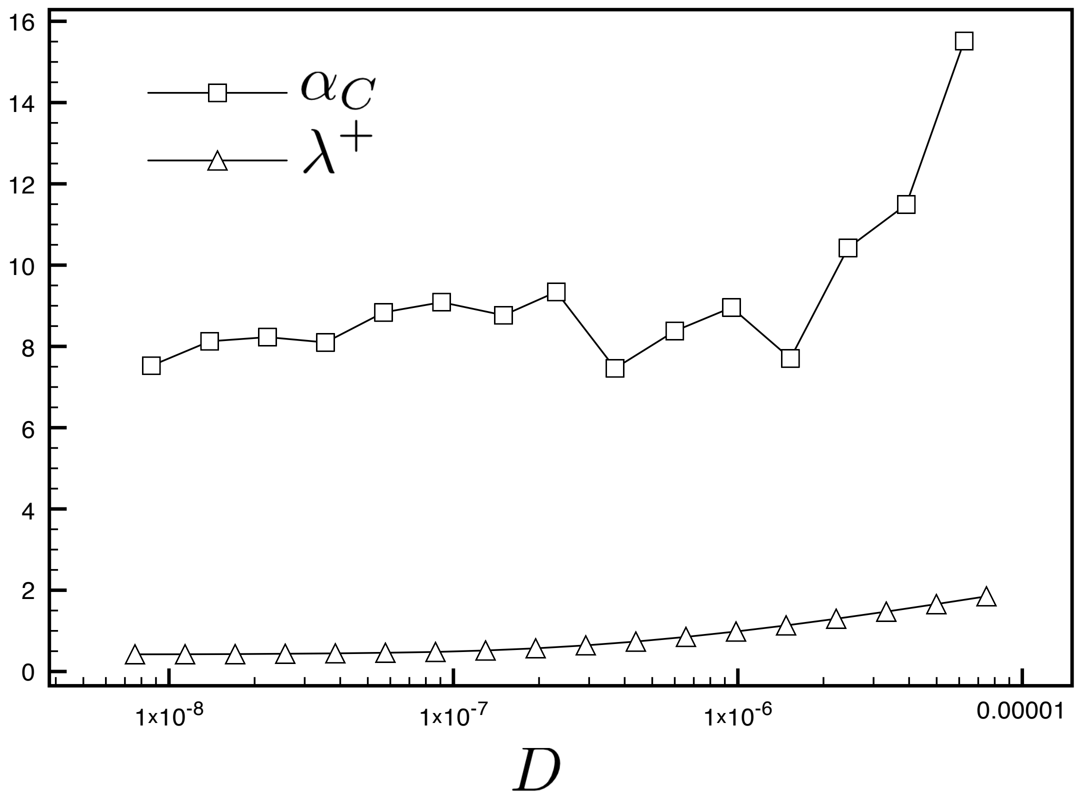



Рисунок 2 – Зависимости АП-размерности $\alpha_c$ и ляпуновского показателя $\lambda^+$ от интенсивности шума $D$.

типликативного шума $D$ значение АП-размерности увеличивается. Из теории известно, что размерность Афраймовича-Песина в случае одномерного отображения равна топологической энтропии $h_T$. В свою очередь, последняя может быть оценена как сумма положительных ляпуновских показателей $h_T = \sum \lambda^+$. Рассчитаем для исследуемой системы ляпуновский показатель и сравним полученное значение $\lambda^+$ с АП-размерностью $\alpha_c$. Из рис. 2

видно, что количественно значение АП-размерности отличается от ляпуновского показателя $\alpha_c \neq \lambda^+$. Однако, качественно размерность Афраймовича-Песина, также как и ляпуновский показатель растёт с увеличением шума. Таким образом можно сделать следующий вывод: в неавтономной системе при наличии мультипликативного шумового воздействия нарушается равенство размерности Афраймовича-Песина и ляпуновского показателя. Тем не менее качественно АП-размерность и ляпуновский показатель, растут при увеличении интенсивности шума, что можно объяснить возрастанием сложности динамики системы.

## Заключение

Проведённые численные эксперименты позволили установить следующее:

а) Воздействие мультипликативным шумом на хаотическое отображение приводит к изменениям плотности вероятности, что было установлено и для случая аддитивного шума.

б) Мультипликативный шум приводит к более заметным изменениям вероятностной меры, что можно использовать при решении задач управления статистикой времён возвратов на основе леммы Каца.

в) С уменьшением размера областей покрытия аттрактора $\varepsilon < 10^{-6}$ зависимость среднего минимального времени возврата $\langle \tau_{\mathrm{inf}} \rangle$ от размера области возврата $\varepsilon$ допускает линейную аппроксимацию, что позволяет определить размерность Афраймовича-Песина и в случае воздействия мультипликативного шума.

г) Воздействие мультипликативного шума приводит к тому, что равенство показателя Ляпунова размерности Афраймовича-Песина (доказанное для одномерного отображения без шума [6]) нарушается, что иллюстрирует Рис. 2.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. H. Poincaré. Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, 13:1–270, 1890.

2. V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1989.

3. Valentin Afraimovich, Edgardo Ugalde, and Jesus Urias. *Fractal Dimensions for Poincaré Recurrences*. Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. Elsevier Science, 2006.

4. Nadezhda I. Semenova, Tatiana E. Vadivasova, Galina I. Strelkova, and Vadim S. Anishchenko. Statistical properties of poincaré recurrences and afraimovich-pesin dimension for the circle map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1–3):1050 – 1061, 2015.

5. Masaki Hirata, Benoit Saussol, and Sandro Vaienti. Statistics of return times: A general framework and new applications. *Communications in mathematical physics*, 206(1):33–55, 1999.

6. B. Saussol, S. Troubetzkoy, and S. Vaienti. Recurrence, dimensions and lyapunov exponents. *Journal of Statistical Physics*, 106(3-4):623–634, 2002.

7. Mark Kac. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, volume 1a of *Lectures in Applied Mathematics Series*. Amer Mathematical Society, 1957.

8. Н. Четаев. Об устойчивости в смысле Пуассона. *Учёные Записки Казанского Государственноо Университета*, 89(199-201), 1929.

9. Norbert Marwan, M. Carmen Romano, Marco Thiel, and Jurgen Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438(5–6):237 – 329, 2007.

10. E. J. Ngamga, D. V. Senthilkumar, A. Prasad, P. Parmananda, N. Marwan, and J. Kurths. Distinguishing dynamics using recurrence-time statistics. *Phys. Rev. E*, 85:026217, Feb 2012.

11. V. Afraimovich. Pesin's dimension for poincaré recurrences. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, 7(1):12–20, 1997.

12. V. Afraimovich and G. M. Zaslavsky. Fractal and multifractal properties of exit times and poincaré recurrences. *Phys. Rev. E*, 55:5418–5426, May 1997.

13. Yakov B. Pesin. *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications.* Chicago Lectures in Mathematics, 1997.

14. Vincent Penné, Benoit Saussol, and Sandro Vaienti. Dimensions for recurrence times: topological and dynamical properties. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 5:783–798, 1999.

15. Y.I. Boev and V.S. Anischenko. Afraimovich-pesin dimension for the transition to chaos in one-dimensional maps. In *International Conference "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity"*, 2014.

16. J.B. Gao. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications. *Physical Review Letters*, 83(16):3178–3181, 1999.

17. Murilo S. Baptista, Suso Kraut, and Celso Grebogi. Poincaré recurrence and measure of hyperbolic and nonhyperbolic chaotic attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 95:094101, Aug 2005.

18. Eduardo G. Altmann and Tamás Tél. Poincaré recurrences and transient chaos in systems with leaks. *Phys. Rev. E*, 79:016204, Jan 2009.

19. V. Afraimovich, W.W. Lin, and N.F. Rulkov. Fractal dimension for poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(10):2323–2337, 2000.