Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра__ математического анализа__

___Принцип площадей в теории однолистных функций_____ __
название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки__2__ курса __228__группы

направления _02.04.01. Математика и компьютерные науки__ _____________
код и наименование направления

___________________Механико-математического факультета______________
наименование факультета

_________________Кириченко Екатерины Александровны__________ _____
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
__д.ф.-м.н., профессор___ __________________ _Д.В. Прохоров__
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
__д.ф.-м.н., профессор__ _ __________________ _Д.В. Прохоров__
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов__2016_ _год

ВВЕДЕНИЕ

Основными методами геометрической теории функций являются следующие: метод площадей и контурного интегрирования, параметрический метод, вариационный метод, метод интегральных представлений, метод экстремальных метрик. Эти методы появились в разное время, и поводом для для их создания явились различные экстремальные задачи, которые в то время по другому не решались. Отсутствие во множестве однолистных функций структуры линейного пространства потребовало создания оригинальных методов исследования экстремальных задач. Одним из методов решения экстремальных задач для однолистных функций является метод площадей, основанный на принципе площадей, который в применении к однолистным функциям выражает тот факт, что площадь дополнения к образу области при её отображении регулярной в ней функцией неотрицательна.

Геометрические соображения стали основой для метода площадей, использованного в 1914 году Гронуоллом, и затем Л. Бибербахом в задачах о постоянной Кебе и коэффициентах на классе S голоморфных нормированных однолистных в единичном круге функций, а также в работах Фабера и Г.М. Голузина. Метод площадей, являющийся в первооснове самым элементарным среди методов геометрической теории функций, получил развитие и многочисленные приложения особенно за последние 40-50 лет. С помощью метода площадей можно улучшить многие результаты оценочного характера в конструктивной теории функций комплексного переменного.

Практическая часть работы заключалась в исследовании интегрального оператора, оценка которого вытекает из формулы Эрмита для остаточного члена интерполирования.

Работа состоит из трех глав: Некоторые асимптотические формулы в классе S_α, Интерполирование регулярных функций, Логарифмическая ёмкость замкнутого множества.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Некоторые асимптотические формулы в классе S_α.

Напомним, что классом S_α, $0 \le \alpha \le 1$, мы называем подкласс функций $f(z) \in S$, для которых

$$\lim_{r \to 1-0} (M(r,f)\frac{(1-r)^2}{r}) = \alpha \le 1$$

где $M(r,f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, 0 < r < 1$.

Мы будем рассматривать классы S_α при $\alpha > 0$. При этом существует направление $\theta, -\pi < \theta \le \pi$ наибольшего роста, такое что

$$\lim_{r \to 1-0} [|f(re^{i\theta})|\frac{(1-r)^2}{r}] = \alpha,$$

$$\lim_{r \to 1-0} [|f'(re^{i\theta})|\frac{(1-r)^3}{(1+r)}] = \alpha.$$

Далее считаем, что θ фиксировано.

Дадим сначала асимптотические формулы для $f(z) \in S_\alpha$ и для $f'(z)$ вблизи от точки $z = e^{i\theta}$. Фиксируем $\varphi,\ \pi/4 < \varphi < \pi/2$, и для $r,\ 1-(1-r)\tan\varphi \ge \sin\varphi,\ \ 0 < r < 1$, полагаем

$$\Delta(r,\varphi) = \Big\{ z : 1-(1-r)\tan\varphi < |z| < 1 - \frac{1-r}{\tan\varphi},$$

$$|\arg(1-e^{i\theta}z)| < \varphi,\ \ |\arg(e^{-i\theta}z)| < \frac{\pi}{2} - \varphi \Big\}.$$

Теорема 1.1. *Пусть* $f(z) \in S_\alpha,\ \ 0 < \alpha < 1,\ \ (\tan\varphi)^{-1} < \Theta < \tan\varphi,\ \ r_* = 1 - \Theta(1-r)$. *Тогда*

$$f(z) = \frac{\alpha z}{(1-e^{i\theta}z)^2} \exp\{i(\arg f(r_* e^{i\theta}) - \theta)\} * (1 + \epsilon(r,z)), z \in \Delta(r,\varphi)$$

$$f'(z) = \frac{\alpha(1+e^{i\theta}z)}{(1-e^{i\theta}z)^3} \exp\{i(\arg f(r_* e^{i\theta}) - \theta)\} * (1 + \epsilon_1(r,z)), z \in \Delta(r,\varphi)$$

где $\epsilon(r,z) \rightrightarrows 0$ *и* $\epsilon_1(r,z) \rightrightarrows 0$, $z \in \Delta(r,\varphi)$, *при* $r \to 1-0$.

Теорема 1.2. *Если* $f(z) \in S_\alpha$, $\alpha > 0$, *то для любого* ϵ, $0 < \epsilon < 1$ *существует постоянная* $K > 2$ *такая, что для* $z = re^{it}$, $1 - \frac{\pi}{K} \le r < 1$, $\pi \ge |\theta - t| \ge K(1-r)$, *справедливы неравенства*

$$|f(z)| \le \frac{|z|}{(1-r)^\epsilon |1 - e^{-i\theta z}|^{2-\epsilon}} < \frac{|z|}{(1-r)^{2\epsilon}|1-e^{-i\theta z}|^{2-2\epsilon}}.$$

Замечание. Эти теоремы показывают, что поведение функции $f(z)$ в близи окружности $|r| = 1$ в некотором смысле аналогично поведению функции

$$\frac{\alpha z}{(1 - e^{-i\theta}z)^2} \exp[i(\arg f(z_* e^{i\theta}) - \theta)].$$

Можно ожидать аналогичные свойства у ряда у ряда функционалов, заданных на классе S_α.

Глава 2. Интерполирование регулярных функций. Введём некоторые обозначения. Множеством типа $\mathfrak{M}$ будем называть замкнутое множество точек комплексной плоскости, содержащее более одной точки, дополнение которого до расширенной плоскости есть односвязная область, содержащая точку ∞. $\overline{B}$ - множество типа $\mathfrak{M}$, B_1 его дополнение, L-граница B, $\omega = \varphi(z)$ функция, конформно и однолистно отображающая B^1 на область $|\omega| > 1$, причем $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) = \frac{1}{c} > 0$, $z = \psi(\omega)$ функция, обратная для $\omega = \varphi(z)$, $L_\rho, 1 < \rho < \infty$, линия уровня области B^1, т.е образ окружности $|\omega| = \rho$ при отображении $z = \psi(\omega)$, B_ρ - ограниченная область с границей L_ρ, B^1_ρ - неограниченная область с границей L_ρ.

Пусть $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, ..., z_{n+1}^{(n)}, n = 0, 1, ...,$ - последовательность узлов интерполирования, расположенных на $L_r, 1 < r < \infty$. Положим $\omega_k^{(n)} = \psi(z_k^{(n)})$. Узлы $z_k^{(n)}, k = 1, ..., n+1$ будем называть равнорасположенными на L_r, если точки $\omega_k^{(n)}$ делят окружность $|\omega| = r$ на $n+1$ равных частей. Далее полагаем, что узлы $z_k^{(n)}$ равнорасположены на L_r. Пусть $f(z)$ - функция, регулярная на $\overline{B}$, например, в $B_{\rho_0}, 1 < \rho_0 < \infty$ и $p_n(z)$ интерполяционный полином степени не выше n для $f(z)$, построенный по узлам $z_k^{(n)}, k=1,...,n+1$ лежащим на $L_r, 1<r<\rho_0$. Тогда

$$r_n(z)=f(z)-p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)}d\zeta, \tag{1}$$

$$\omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n+1}(z-z_k^{(n)}),$$

где L - какой либо замкнутый кусочно-гладкий контур содержащий внутри все точки $z_k^{(n)}$ и z точку и лежащий в B_{ρ_0}. В качестве L обычно берут линию уровня $L_\rho, r<\rho<\rho_0$. Формула (1) называется формулой Эрмита для остаточного члена интерполирования $r_n(z)$. Из формулы (1) сразу следует оценка

$$\sup_{z\in B_r}|f(z)-p_n(z)|\le \frac{\sup_{z\in L_r}|\omega_n(z)|}{\inf_{\zeta\in L_\rho|\omega_n(\zeta)|}}\sup_{z\in L_r}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|d\zeta|. \tag{2}$$

таким образом оценка $|f(z)-p_n(z)|$, $z\in B_r$ сводится к оценке двух сомножителей стоящих в правой части формулы (2). Наша задача - получить возможно лучшие оценки этих двух сомножителей в случае равнорасположенных узлов интерполирования.

Теорема 2.5. *Пусть $\overline{B}$ - множество типа $\mathfrak{M}$. Если функция $f(z)$ регулярна в области $B_{\rho_0}, 1<\rho_0<\infty$, и*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\psi(\rho e^{i\theta}))|d\theta\le M,\ \ r<\rho<\rho_0.$$

то для интерполяционных полиномов $p_n(z)$, $n=1,2,...$, построенных по равнорасположенным на $L_r, 1<r<\rho_0$ узлам имеют место оценки

$$|f(z)-p_n(z)|\le M\frac{\rho_0+r}{\rho_0-r}B_n(\rho_0,r)e^{B_n(\rho_0,r)}\frac{2r^{n+1}}{\rho_0^{n+1}-r_0^{n+1}}, z\in\overline{B_r}$$

где $B_n(\rho_0,r)$ определяется следующей формулой

$$B_n(\rho,r)=\sqrt{(n+1)\ln\frac{(\rho r+1)^2}{(\rho^2-1)(r^2-1)}\ln\frac{r^{2(n+1)}}{r^{2(n+1)}-1}}$$

При $z \in \overline{B_{r'}}, 1 \le r' < r$, *дробь* $\frac{\rho_0 + r}{\rho_0 - r}$ *можно заменить на* $\frac{\rho_0+r'}{\rho_0-r'}$.

Глава 3. Логарифмическая ёмкость замкнутого множества.

Введём некоторые обозначения. E - произвольное замкнутое множество точек плоскости Z, $B = C'E$ - та из дополнительных для E областей, которая содержит точку ∞, E^δ, $\delta > 0$ - множество точек z, расстояние которых от E не превосходит δ, $B^\delta = C'E^\delta$ - та из дополнительных для E^δ областей, которая содержит точку ∞. B^δ - конечносвязная область.

Определение 3.1. *Пусть* τ*-фиксированная точка области* B *и* $u(z, \tau)$ *- гармоническая функция точки* $z \in B$ *принимающая на* L *значения* $u(z, \tau) = \ln|z - \tau|$. *Если граница* L *- гладкая, то такая функция существует. Определим функцию*

$$g(z, \tau) = \ln|z - \tau|^{-1} + u(z, \tau),$$

которая обладает следующими свойствами:

1) $g(z, \tau)$*-гармоническая в* B*, кроме точки* $z = \tau$,

2) $g(z, \tau) + \ln|z - \tau| = u(z, \tau)$ *гармонична и в точке* $z = \tau$,

3) $g(z, \tau) \to 0$ *при* $z \to L$ *из* B. *Функция обладающая этими тремя свойствами называется функцией Грина области* B.

Полагаем что множество E такое что существует функция Грина $g_E(z, \infty)$ области B. Как известно, функция Грина представима в виде

$$g_E(z, \infty) = \ln|z - z_0| + \gamma(E) + u_E(z), \;\; z \in B$$

где z_0 - какая либо точка из B, $u_E(z)$ - гармоническая в B функция такая, что $u_E(\infty) = 0$. Число $\gamma(E)$ *постоянная Робэна* для области B, а $C = C(E) = \text{cap } E = e^{-\gamma(E)}$*-логарифмической емкостью множества* E. Если для области B функция Грина не существует, то полагаем $C(E) = 0$.

Определение 3.2. *Полином $\tilde{\tau}_n(z)$ назовем полиномом наименее отклоняющимся от нуля на E (или полиномом Чебышева для E) с корнями на E. Корни $\tilde{z}_k,\ \ k = 1, 2...n,\ \ n = 1, 2, ...,$ полинома $\tilde{\tau}_n(z)$ назовем узлами Чебышева для E.*

Теорема 3.1. *Если множество E такое, что область B имеет функцию Грина $g_E(z, \infty)$ и $\overline{\tau_n}(z)$ - полином Чебышева степени n с нулями на E, то внутри B при $n \to \infty$, получим*

$$\frac{1}{n} \ln |\overline{\tau_n}(z)| - \ln \overline{\mu_n} \rightrightarrows g_E(z, \infty).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрели один из методов решения экстремальных задач для однолистных функций - метод площадей, основанный на принципе площадей, который в применении к однолистным функциям выражает тот факт, что площадь дополнения к образу области при её отображении регулярной в ней функцией неотрицательна. Принцип площадей систематически применяется к экстремальным задачам, возникающим в теории однолистных функций, с его помощью получено большое число новых результатов и в нашей стране и за рубежом, а также во многих случаях удалось получить значительно более простые доказательства многих известных результатов, полученных ранее другими методами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.

2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

3. Привалов И.И. Субгармонические функции. М.: Наука, 1978.

4. Базилевич И.Е. Об оценке среднего модуля и коэффициентов однолистных функций, Сб. Исслед. по совр. проблемы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1961. С. 7-41.

5. Хейман В.К. Многолистные функции. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

6. Базилевич И.Е. Лебедев Н.А. О дисперсии коэффициентов функций, p-листных в среднем, Матем. сб. Т.71. вып.2. 1968. С. 227-235.

7. Лебедев Н.А. Дополнение к статье "Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях". Вестн. Ленингр. университета Т.7. 1967. С. 64-73.

8. Лебедев Н.А. Смирнов В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.

9. Градштейн И.С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

10. Баранова В.А. Об интерполировании в многосвязной области. Вестник Ленингр. университета Т. 1. 1973.

11. Pommerenke Ch. On the logarithmic capacity and conformal mapping. Duke Math. J. Vol. 35. № 2. 1968. P. 321-325.

12. Широков Н.А. О теореме регулярности Хеймана. Зап. научн. сем. Ленингр. отд. Матем. ин-та, т.24, 1972. с. 182-200.

13. Hayman W.K. The asymptotic behaviour of p-valent function. Proc. London Math. Soc., Vol. 5. №. 19, 1955. P. 257-284.

14. Fekete M. Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen-algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koefficienten. Math. Z. b. 119, t. 1, 1923. s. 228-249.

15. Fekete M. Uber den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. Math. Z. b. 32, t. 2, 1930. s. 215-221.