Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

______Оценки коэффициентов для ограниченных, отличных от нуля функций_______
наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки)__2__ курса __228___группы

направления ***02.04.01 – Математика и компьютерные науки***
код и наименование направления (специальности)

_____________________***механико-математического факультета***______________________
наименование факультета, института, колледжа

_____________________________ Лучковой Ирины Валерьевны___________________________
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

__ Д.ф.-м.наук, профессор_ _________________________ ______Д.В.Прохоров______
должность, уч. степень, уч. звание подпись,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.наук, профессор__ ___________________________ ______Д.В.Прохоров_______
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

Введение. В данной работе рассматривается несколько проблем, касающихся тейлоровских коэффициентов функций, аналитических в единичном круге. Одной из главных тем в теории функций комплексного переменного (одной переменной) является оценка коэффициентов функций в различных классах. Известным примером является гипотеза Бибербаха (1916 год), которая утверждает, что коэффициенты Тейлора каждой однолистной функции $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n, |z| < 1$, удовлетворяют неравенству $|a_n| \leqslant n$. Рассмотрим несколько классов ограниченных функций.

Если мы знаем, что в данном классе W, все функции равномерно ограничены, то есть существует $M > 0 : |f(z)| \leqslant M(z \in \Delta_1,$
$\Delta_1 = \{z \in C : |z| < 1\}, f \in W)$, из этого следует, что коэффициенты каждой функции $f \in W$ удовлетворяют неравенству $|a_n| \leqslant M$.

В случае если у нас нет никаких других ограничений на функции в классе W, отсюда следует, что оценка $|a_n| \leqslant M$ является точной, то есть существует $f \in W$ (а именно $f : z \to Mz^n$), для которой у нас есть равенство. Справедливо спросить, что произойдет, если у нас есть другие ограничения на W?

Задача нахождения точной верхней границы для модулей коэффициентов a_n не является легкой. Кжиж [9] выдвинул гипотезу о том, что $|a_n| \leqslant \frac{2}{e}(n \in N)$. Мы докажем эту гипотезу для первых трех коэффициентов. Кроме того, мы рассмотрим несколько других классов функций, тесно связанных с классом B^*. Для доказательства в работе будут использоваться несколько методов, такие как принцип подчинения, метод Шура. Некоторые оценки получены с помощью громоздких, но элементарных вычислений.

Поскольку задачу нахождения точной оценки коэффициентов гипотезы Кжижа можно рассмотреть как нелинейную задачу, отсюда следует, что связанные с этим расчеты довольно усложняются. При помощи компьютерных вычислений легко проверить некоторые неравенства. К сожалению, доказывая их, можно иногда встретить некоторые тяжелые расчеты.

В первой главе вводятся несколько инструментов, которые будут необходимы в остальной части работы. Большинство из них, такие как, например, принцип подчинения - хорошо известны. Так же вводятся некоторые классы функций, связанные с классом B^*, такие как P и S. Докажем несколько теорем, касающихся отношений между различными классами.

Кроме того, в работе будет показано, как можно переформулировать метод Шура (результат Кампшроера [12]). Этот метод будет ключом к доказательствам гипотез Кжижа.

Во второй главе мы рассмотрим класс B^* более подробно, охарактеризуем экстремальные функции для гипотезы Кжижа и докажем ее для первых трех коэффициентов.

В третьей главе мы рассмотрим подкласс B^*, состоящий из однолистных элементов. Дополнительное ограничение однолистности усложняет нахождение оценок для a_n. Мы можем только дать точные верхние границы для первых двух коэффициентов. Доказательство, касающееся второго коэффициента, является достаточно громоздким, но элементарным (Рууд Эрмерс [1]). Оно основано на доказательстве, данным Прохоровым и Шиналом [11].

Наконец, в четвертой главе мы рассмотрим подкласс B^*, состоящий из полиномиальных элементов. Работа с полиномами имеет преимущество в том, что можно получать информацию о коэффициентах в зависимости от расположения нулей функций. Рассмотрим подкласс P^Γ, содержащий только те полиномы, которые имеют все свои нули на Γ. Докажем (часть) гипотезы, сформулированной Саффом и Шейл-Смоллом, в которой вычисляются коэффициенты функций класса P^Γ. В последней части этой главы рассматривается класс функций, состоящий из полиномиальных элементов степени 3, с действительными коэффициентами. Мы даем точные верхние границы для коэффициентов этих функций.

Основное содержание работы. Глава 1.В первом разделе главы вводятся несколько предварительных сведений:

Пусть $H(\Delta_1)$ - множество функций f, голоморфных в $\Delta_1 = \{z \in C : |z| < 1\}$. Если $f \in H(\Delta_1)$, то ее разложение в ряд Тейлора можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1),$$

где $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Если $W \subset H(\Delta_1)$, тогда определим

$$A_n(W) = \sup_{f \in W} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

$W \subset H(\Delta_1)$ называется инвариантным относительно вращения, если из условия $f \in W$ следует, что для всех $k, \xi \in \Gamma_1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ функции

$f_{k,\xi} : z \to kf(\xi z)$ также являются элементами W. Отметим, что если W является подмножеством $H(\Delta_1)$, инвариантным относительно вращения, то

$$A_n(W) = \sup_{f \in W, f(0) \geqslant 0, f(0)^{(n)} \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

В данной работе мы будем изучать $A_n(W)$ для нескольких подмножеств $W \subset H(\Delta_1)$. Большинство из них тесно связаны с подмножеством B^*:

$$B^* = \{f \in H(\Delta_1) : 0 < |f| \leqslant 1\}.$$

Отметим, что B^* является инвариантным относительно вращения.
Проблема нахождения $A_n(B^*)$ была предложена Кжижем [9], который выдвинул гипотезу:

Гипотеза 1. *(Кжижа)*

Для $n > 1$:

$$A_n(B^*) = \frac{2}{e}.$$

(Очевидно, что $A_0(B^*) = 1$.) Предполагаемое значение достигается только для функций

$$f_{k,\xi} : z \to k \exp\left(\frac{\xi z^n - 1}{\xi z^n + 1}\right) = k\left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e}\xi z^n - \frac{2}{3e}\xi z^{3n} + ...\right) \quad (k, \xi \in \Gamma_1).$$

Во втором разделе вводится понятие экстремальных функций:
Пусть $n \in N, W \subset H(\Delta_1)$.
Будем называть $f \in W$ экстремальной для $A_n(B^*)$, если $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ и $Re\ a_n = A_n(W)$.

Теорема 1. *Для каждого* $n \in N$, *существует экстремальная функция* f *для* $A_n(B^*)$.

А так же рассмотрены классы P, S, B и их свойства, описан метод Шура.

Глава 2. Оценки коэффициентов функций класса B^*. В данной главе более внимательно рассмотрен класс B^*. Нашей главной целью является доказать гипотезу Кжижа для первых трех коэффициентов.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \{1, 2, 3, 4\}, f \in B^*, f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, *тогда*

$$|a_n| \leqslant \frac{2}{e}.$$

Равенство достигается только для $z \to f_{k,\xi}(z) = k \exp\left(\frac{\xi z^n - 1}{\xi z^n + 1}\right), (k, \xi \in \Gamma_1)$.

Теорема 3. *Пусть* $n \in N$, *тогда экстремальная функция* $A_n(B^*)$ *имеет вид*

$$f(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{1 + e^{i\theta_k} z}{1 - e^{i\theta_k} z}\right), \lambda_k \geqslant 0, \theta_k \in [0, 2\pi), k = \overline{1, n}.$$

В работе приводится более общая теорема, из которой следует гипотеза Кжижа.

Определение 1. *Для* $\gamma \in [0, 1)$:

$$B^*_\gamma = \{f \in B | f \text{ не включает некоторые значения } \omega : |\omega| = \gamma\}.$$

Так как B^*_γ *является инвариантным относительно вращения, то отсюда следует, что для* $n \in N$ *мы так же имеем*

$$A_n(B^*_\gamma) = \sup_{f \in B^*_\gamma} |a_n|.$$

Теорема 4.

$$A_n(B^*_\gamma) = \frac{e^{-\alpha}(1 + \alpha)^2 - e^{\alpha}(1 - \alpha)^2}{2\alpha} \quad (n = 1, 2),$$

где $\alpha \in (0, 1] : \gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} e^{\alpha}$.

Гипотеза Кжижа следует если $\gamma = 0$.

Теорема 5. *(Гипотеза Кжижа для n=3)*
Пусть $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in B^*, a_3 \geqslant 0, a_0 = e^{-\alpha}, \alpha \geqslant 0$. *Тогда*

$$a_3 \leqslant \begin{cases} 2\alpha e^{-\alpha}, & \text{если } \alpha \leqslant 1\frac{1}{2}; \\ 2\alpha e^{-\alpha} \sqrt{3\left(\frac{-\alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 6\alpha + 6}\right)}, & \text{если } \alpha \in [1\frac{1}{2}, S]; \\ 2\alpha e^{-\alpha}(\frac{2}{3}\alpha^2 - 2\alpha + 1), & \text{если } \alpha \geqslant S. \end{cases}$$

где $S \approx 4.06...$ *это действительный корень многочлена* $2\alpha^3 - 12\alpha^2 + 18\alpha - 9$, *точность достигается для* $\alpha \notin (1\frac{1}{2}, S)$.

Следствие 1. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in B^*$. *Тогда*

$$|a_3| \leqslant \frac{2}{e}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$f = k \exp\left(\frac{\xi z^3 - 1}{\xi z^3 + 1}\right), k, \xi \in \Gamma_1.$$

Теорема 6. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in B^*$. *Тогда*

$$|a_4| \leqslant \frac{2}{e}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$f = k \exp\left(\frac{\xi z^4 - 1}{\xi z^4 + 1}\right), k, \xi \in \Gamma_1.$$

Глава 3. Подкласс B^*, состоящий из однолистных функций.

Определим подкласс $B_U^* \subset B^*$ следующим образом

$$B_U^* = \{f \in B^* : f - \textit{однолистная функция}\}.$$

Для $d \in (0, 1)$ определим $k_d \in B_U^*$ - функция, которая отображает единичный круг на $\{z : |z| < 1, z \notin (-1, 0]\}$ и $k_d(0) = d, k_d'(0) > 0$.

Гипотеза 2. *(Хаммел, Шейнберг, Зальцман)*

Для $n \geqslant 1$ *максимум* $A_n(B_U^*)$ *достигается только для* $k_d \in B_U^*$ *и ее вращениями.*

Теорема 7.

$$A_1(B_U^*) = 12 - 8\sqrt{2}.$$

Равенство достигается только при $k_{\sqrt{2}-1}$ *и ее вращениями.*

Теорема 8.

$$A_2(B_U^*) = 0,45538...$$

Это значение достигается только для k_{d^*} *и ее вращениями, где* d^* *- наименьший положительный корень многочлена* $(1 + d)^4 = 12d$.

Определение 2. *Пусть $B_U^*(R) \subset B_U^*, B_U^*(R)$ содержит те функции, которые имеют действительные коэффициенты. Для $n = 1, 2$:*

$$A_n(B_U^*(R)) = A_n(B_U^*).$$

Для больших n имеем:

$$A_n(B_U^*(R)) \leqslant A_n(B_U^*) \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{n}.$$

Следствие 2. *Пусть $\phi \in B_U^*(R)$, $\phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \phi(0) > 0, \phi'(0) \geqslant 0$. Тогда*

$$-0.2513... < a_3 < 0.386...$$

Однако, функции $k_{d_1}, k_{d_2}, d_1 \approx 0.34..., d_2 \approx 0.06...$ имеют третий коэффициент

$$a_3(k_{d_1}) \approx -0.2510..., a_3(k_{d_2}) \approx 0.315...$$

Глава 4. Полиномиальные функции B^*.

Для $m \in N$ определим следующие множества

$$\begin{aligned}
P^* &= \{p \in B^* : p - \textit{многочлен}\},\\
P^\Gamma &= \{p \in P^* : p, \textit{все нули которого лежат на}\, \Gamma_1\},\\
P_m^* &= \{p \in B^* : \textit{многочлен}\, p\, \textit{степени}\, m\},\\
P_m^\Gamma &= \{p \in P_m^* : p, \textit{все нули которого лежат на}\, \Gamma_1\}.
\end{aligned}$$

Определение 3. *Для $n \in N \cup \{0\}$ определим*

$$\begin{aligned}
A_n^*(P^*) &= \lim_{m\to\infty} A_n(P_m^*),\\
A_n^*(P^\Gamma) &= \lim_{m\to\infty} \sup A_n(P_m^\Gamma).
\end{aligned}$$

Теорема 9. *Для $n \in N \cup \{0\}$*

$$A_n^*(P^\Gamma) = \frac{1}{2} A_n^*(P^*).$$

Следствие 3.

$$A_0^*(P^\Gamma) = \frac{1}{2},$$

$$\textit{для}\, n = \overline{1,4} : A_n^*(P^\Gamma) = \frac{1}{e},$$

$$\textit{для}\, n > 4 : A_n^*(P^\Gamma) < \frac{1}{2}.$$

Теорема 10. *(Сафф, Шейл-Смолл)*

Пусть $m \in N, 0 \leqslant n \leqslant m, 2n \neq m$. *Тогда*

$$A_n(P_m^{\Gamma}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $z \to \frac{\lambda+\mu z^m}{2}, |\lambda| = 1$, $|\mu| = 1$ *и* $n = 0$ *или* $n = m$.

Следствие 4. *Пусть* $m \in N, \frac{m}{2} \leqslant n \leqslant m$. *Тогда*

$$A_n(P_m^*) = \frac{1}{2}.$$

Теорема 11. *Пусть* $m \in N, 1 \leqslant n \leqslant m$, *тогда существует* $p \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} P_j^*$, $p(z) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j z^j$:

$$|a_n| = A_n(P_m^*), \quad 0 \in \overline{p(\Delta_1)}.$$

Определение 4. *Пусть* $\delta P_m^* = \{p \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} P_j^* : 0 \in \overline{p(\Delta_1)}\}$. *Для* $1 \leqslant n \leqslant m$:

$$A_n(\delta P_m^*) = A_n(P_m^*).$$

Теорема 12.

$$A_0(\delta P_2^*) = \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $p : z \to \frac{3}{8}\sqrt{3}(1 - z)$ $(1 + \frac{1}{3}z)$.

Определение 5. $P_m^*(R) \subset P_m^*$ *- подкласс, содержащий действительные коэффициенты.*

Теорема 13.

$$A_0(\delta P_3^*(R)) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$p : z \to \frac{\sqrt{2}}{8}(z - 1)(z - 1 - \sqrt{2})(z + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).$$

Теорема 14.

$$A_1(\delta P_3^*(R)) = \frac{10 + 7\sqrt{7}}{81} - \sqrt{3}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$p : z \to \sqrt{3}\frac{4\sqrt{7} - 29}{243}(z - 1)^2 \left(z + \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right).$$

Заключение. В данной работе мы рассмотрели задачу нахождения точной верхней границы для модулей тейлоровских коэффициентов функций, аналитических в единичном круге. Доказали гипотезу Кжижа для первых трех коэффициентов и рассмотрели несколько других классов функций, тесно связанных с B^*. Так же в работе приводится решение численного эксперимента - нахождение $\max a_n$ (для $n = 3, n = 4$) на множестве функций $f(z)$. Данная задача решена с помощью Wolfram Mathematica.

Список использованных источников

1 Ermers, R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions: P.H.D. Thesis / R. Ermers. Nijmegen, 1990. P. 1-107.

2 Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. М. : Гостехиздат., 1950.

3 Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. М. : Наука, 1966.

4 Маркушевич, А.И. Краткий курс аналитических функций / А.И. Маркушевич. М. : Гос.тех.-теор., 1957.

5 Александров, И.А. Аналитические функции комплексного переменного / И.А. Александров, В.В.Соболев. М. : Высшая школа, 1984.

6 Garnett, J. B. Bounded Analytic Functions, Pure and Applied Mathematics 96 / J. B. Garnett. New York : Academic Press, 1981.

7 Kristiansen, G.K. Some inequalities for algebraic and trigonometric polynomials / G.K. Kristiansen // J. London Math. Soc. 1979 V. 20. P. 300-314.

8 Tammi, O. Extremum Problems for Bounded Univalent Functions, Lecture Notes in Mathematics 646 / O. Tammi. Berlin : Springer-Verlag, 1978.

9 Krzyz, J. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions / J. Krzyz // Ann. Polon. Math. 1968. V. 20. P. 314.

10 Hummel, J. A coefficient problem for bounded, nonvanishing functions / J. Hummel, S. Scheinberg, L. Zalcman // J. Analyse Math. 1977. V. 31. P. 169-190.

11 Prokhorov, D. V. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions / D. V. Prokhorov, J. Szynal // Bull. Acad. Pol. Sci. 1981. V. 29. P. 223-331.

12 Campschroer, J. T. P. Inverse coefficients and symmetrization of univalent functions: P.H.D. Thesis / J. T. P. Campschroer. Nijmegen, 1984.

13 Brown, J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions / J. E. Brown // Complex Variables. 1987. V. 9. P. 143-152.

14 Delin Tan. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions / Delin Tan. Chinese Ann. Math. A4, 1983. P. 97-104.

15 Saff, E. B. Coefficient and integral mean estimates for algebraic and trigonometric polynomials with restricted zeros / E. B. Saff, T. Sheil-Small // J. London Math. Soc. 1974. V. 9. P. 16-22.

16 Horowitz, C. Nonvanishing functions in H^p / C. Horowitz // Israel J. Math. 1978. V. 30. P. 285-291.

17 Duren, P. L. Univalent Functions, Grundlehren der math. Wissenschaften 259 / P. L. Duren. New York : Springer-Verlag, 1983.

18 Littlewood, J. E. On inequalities in the theory of functions / J. E. Littlewood // Proc. London Math Soc. 1925. V. 23. P. 481-519.

19 Livingston, A. E. The coefficients of multivalent close-to-convex functions/ A. E. Livingston // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. P. 545-552.

20 Rogosinski, W. On the coefficients of subordinate functions / W. Rogosinski // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48-82.

21 Lax, P. Proof of a conjecture of P. Erdos on the derivative of a Polynomial / P. Lax // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 509-513.

22 Marden, M. The geometry of the zeros of a polynomial in a complex Variable / M. Marden. Amer. Math. Soc. Surveys, No 3, 1949.

23 Herglotz, G. Uber Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Emheitskreis / G. Herglotz // S.-B. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl. 1911. B.63. S. 501-511.

24 Pommerenke, C. Univalent Functions / C. Pommerenke. Gottingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.

25 Landau, E. Darstellung und Begrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Dritte erweiterte Auflage) / E. Landau, D. Gaier. Berlin : Springer-Verlag, 1986.

26 Bieberbach, L. Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eme schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln / L. Bieberbach :S.- B. Preuss. Akad. Wiss., 1916. S. 940-955.

27 Loewner, C. Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I / C. Loewner // Math. Ann. 1923. B. 89. S. 103-121.

28 Garabedian, P. R. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient / P. R. Garabedian, M. Schiffer // J. Rationed Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 427-465.

29 Pederson, R. N. A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient / R. N. Pederson // Arch. Rational Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 331-351.

30 Pederson, R. N. A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient / R. N. Pederson, M. Schiffer // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 45. P. 161-193.

31 de Branges, L. A proof of the Bieberbach conjecture / L. de Branges // Acta Math. 1985. V. 154. P. 137-152.