Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

# Некорректные задачи математической физики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента (ки) 4 курса 421 группы
направления (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математический факультет

Ройской Евгении Сергеевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ______________ Тимофеев В.Г.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена решению задач оптимального восстановления операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами на заданных классах функций нескольких переменных. Данная задача тесно связана с задачей С.Б. Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования, норма которых ограничена некоторым числом $N$, а также с неравенствами типа Ландау-Колмогорова

$$\|f^{(k)}\|_C \leq C_{n,k}\|f\|_C^{(n-k)/n}\|f^{(n)}\|_C^{k/n},$$

где $f(x)$ – действительные или комплекснозначные функции, заданные на числовой оси, $(n-1)$-ая производная которых абсолютно непрерывна на любом конечном интервале, $k, n$ – целые числа, которые удовлетворяют соотношению $0 \leqslant k < n$, норма $\|f^{(n)}\|_C$ понимается как точная верхняя грань абсолютных величин производных чисел функции $f^{(n-1)}(x)$, $C_{n,k}$ – наименьшие возможные константы для любых заданных натуральных чисел $k$ и $n$, $0 < k < n$

Вопросы восстановления значений операторов являются объектом изучения теории некорректно поставленных задач. Задачи данного типа возникают в теории интерполирования, приближения функций и в вычислительной математике. Задачу восстановления оператора изучали С.Б. Стечкин, В.Н. Габушин, Ю.Н. Субботин, А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев, В.К. Иванов, В.Н. Страхов, С.А. Смоляк, Н.С. Бахвалов, В.В. Иванов, В.А. Морозов, В.А. Винокуров, В.В. Васин, А.Г. Марчук, К.Ю. Осипенко и др. (см. библ. в [2]-[10]).

Цель работы: найти оптимальное восстановление операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами на заданных классах, построить операторы оптимального восстановления.

Актуальность: во многих практических задачах возникает ситуация, когда необходимо знать (по возможности, точно) какую-либо характеристику сигнала (скажем, его значение в данной точке, или интеграл от него, или вообще целиком весь сигнал в той или иной метрике) по некоторой информации о самом сигнале (например, известны значения этого сигнала в данном наборе точек или известны его коэффициенты Фурье, Тейлора и т.п.), которая может быть задана неполно и/или неточно. Математическая теория, где ставятся и изучаются подобного рода задачи называется теорией оптимального восстановления. Она активно развивается последние несколько десятилетий. Теория оптимального восстановления предлагает новый подход к решению достаточно широкого класса задач, связанных с восстановлением тех или иных характеристик объектов по неполной и/или неточной информации о самих объектах. Важная особенность данного подхода заключается в том, что ставится задача о нахождении на данном классе элементов метода восстановления, являющегося наилучшим среди всех возможных.

Основная часть данной работы состоит из семи разделов. Первый раздел: "Задача об оптимальном восстановлении значений оператора дифференцирования на множестве элементов, заданных с ошибкой". Второй раздел: "Связь задачи восстановления с задачей С.Б. Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами". Третий раздел: "Связь с экстремальными задачами типа Ландау-Колмогорова". Четвертый раздел: "Задача об оптимальном восстановлении оператора дифференцирования в метрике пространств $L_1$". Пятый раздел: "Задача об оптимальном восстановлении оператора дифференцирования в равномерной метрике на классах функций, у которых значение итерированного оператора Лапласа из $L_2$". Шестой раздел: "Задача об оптимальном восстановлении оператора дифференцирования в метрике пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$ на классах функций, у которых значение итерированного оператора Лапласа принадлежит $L_2(\mathbb{R}^m)$". Седьмой раздел: "Примеры применения".

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основная часть данной работы состоит из семи разделов. В первом разделе ставится задача об оптимальном восстановлении значений оператора дифференцирования на множестве элементов, заданных с ошибкой.

Речь идет о задаче

$$\nu(\delta) = \nu(\delta, \mathfrak{M}) = \inf_{T \in \mathfrak{M}} U(\delta, T)$$

восстановления оператора $A$, с помощью класса $\mathfrak{M}$ на элементах множества $W$, заданных с погрешностью $\delta$, где

$$U(T) = U(\delta, T) = \sup_{x \in W} \sup_{\eta \in S(x,\delta)} \|Ax - T_\eta\|_Y$$

$S(x, \delta) = \{\eta \in X : \|x - \eta\| \leqslant \delta\}$ – шар в $X$ радиуса $\delta$ с центром в точке $x$, $U(T)$ – уклонение оператора $T$ от оператора $A$ на классе $\mathfrak{M}$, $X$, $Y$ – линейные нормированные пространства, $A$ – оператор из $X$ в $Y$ с областью определений $D(A)$, $W$ – множество элементов, лежащее в области определения оператора $A$, $\mathfrak{M}$ – заданный класс операторов из $X$ в $Y$.

Нас будут интересовать два случая этой задачи, либо $\mathfrak{M}$ – есть множество $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, Y)$ всех операторов из $X$ в $Y$, либо $\mathfrak{M}$ – есть множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов из $X$ в $Y$. Используя величины

$$\Omega(t) = \sup_{\substack{x,y \in W,\\ \|x-y\|_X \leqslant t}} \|Ax - Ay\|_Y, \;\; \omega(t) = \sup_{\substack{x \in W,\\ \|x\|_X \leqslant t}} \|Ax\|_Y,$$

были получены оценки величин $\nu(\delta)$ и $U(T)$, а именно, если оператор $A$ линейный, а множество $W$ уравновешенное и выпуклое, то

$$\omega(\delta) \leqslant \nu(\delta, \mathcal{O}) \leqslant U(\delta, T_K) \leqslant 2\omega(\delta).$$

Во втором раздела рассматривается связь задачи восстановления с задачей С.Б. Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами, норма которых ограничена некоторым числом $N$.

Пусть $\mathscr{L}(N)$ – множество линейных ограниченных операторов $T$ из $X$ в $Y$ с нормой $\|T\|_X^Y \leqslant N$. Положим

$$E(N) = \inf_{T \in \mathscr{L}(N)} u(T), u(T) = \sup_{x \in W} \|Ax - Tx\|_Y;$$

$E(N)$ – наилучшее приближение на $W$ оператора $A$ операторами класса $\mathscr{L}(N)$.

**Теорема 2.2.** Если $W$ – уравновешенное множество и $A$ – однородный оператор, то
$$\omega(\delta) \leqslant \nu(\delta, \mathcal{O}) \leqslant \nu(\delta, \mathscr{L}) \leqslant \varepsilon(\delta),$$
где
$$\varepsilon(\delta) = \inf_{N>0} \{E(N) + \delta N\}.$$

В третьем разделе рассматривается связь с экстремальными задачами типа Ландау-Колмогорова. Для того, чтобы найти величину оптимального восстановления оператора дифференцирования рассмотрим(ли) решение экстремальных задач типа Ландау-Колмогорова, а именно, получим(ли) оценку производных для функции $u$, используя интегральное представление данной функции и ее производных, а так же рассмотрим(ли) задачу С.Б.Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования.

**Теорема 3.4.** При любом $\delta > 0$ справедливы равенства
$$\nu_\delta(\mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathscr{L}) = \sqrt{2\delta}$$
и оператор $T_h$ является экстремальным при $h = \sqrt{2\delta}$ в задаче
$$\nu_\delta(\mathfrak{M}) = \inf_{T\in\mathfrak{M}} \sup\Big\{\Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} - Tv\Big\|_C : u \in Q, v \in C, \|u-v\|_C \leqslant \delta\Big\}, \;\; i = \overline{1,n}$$
для $\mathfrak{M} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{M} = \mathscr{L}$, где
$$(T_h) = -\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)2\pi^{n/2}} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi+z)\Big|\frac{\partial^2 G(\xi,0)}{\partial x_1 \partial n_\xi}\Big| d\xi,$$
является оператором наилучшего приближения
$$G(\xi, x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Big\{\ln\frac{1}{r_k} - \ln\frac{1}{\rho_k}\Big\}, & \text{если } n = 2; \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Big\{\frac{1}{r_k^{n-2}} - \frac{1}{\rho_k^{n-2}}\Big\}, & \text{если } n \geqslant 2. \end{cases}$$

В четвертом разделе работы расширены результаты предыдущего раздела на случай пространства $L_1$

**Теорема 4.3.** При любом $\delta > 0$ справедливы равенства
$$\nu_\delta(\mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathscr{L}) = \sqrt{2\delta}$$
и оператор $T_h$ при $h = \sqrt{2\delta}$ является экстремальным в задаче восстановления оператора дифференцирования
$$\nu_\delta(\mathfrak{M}) = \inf_{T\in\mathfrak{M}} \sup\Big\{\Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} - Tv\Big\|_C : u \in Q, v \in C, \|u-v\|_C \leqslant \delta\Big\}, \;\; i = \overline{1,n}$$
для $\mathfrak{M} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{M} = \mathscr{L}$

В пятом разделе найдем(нашли) величину оптимального восстановления оператора дифференцирования в равномерной метрике на классах функций из $L_2$, у которых значение $n$ – итерированного оператора Лапласа принадлежит $L_2$, также рассмотрим(ли) соответствующие задачи.

Пусть

$$U_2 = \{u : u \in L_2, \Delta^n u \in L_2\},$$

при этом итерированный оператор Лапласа $\Delta^n u$ понимается в обобщенном смысле : относительно пары функций $u \in L_2$, $v \in L_2$ считаем, что $u \in U_2$ и $v = \Delta^n u$, если для любой функции $\varphi \in D$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta^n \varphi dx.$$

**Теорема 5.4.** Пусть $\alpha_i$ – целые неотрицательные числа, $m$, $n$ – натуральные числа, $0 \leqslant k < 2n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = k$, $m < 2(2n-k)$. При любом $\delta > 0$ справедливы равенства.

$$\nu_\delta(\mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathscr{Z}) = \Big(\frac{4na}{4n-2k-m}\Big)^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \cdot \Big(\frac{4nb}{2k+m}\Big)^{\frac{2k+m}{4n}} \cdot \delta^{\frac{4n-2k-m}{4n}}.$$

Оператор $T_h$ при

$$h = \Big\{\frac{a\delta(2k+m)}{b(4n-2k-m)}^{1/2n}\Big\}$$

является экстремальным в задаче восстановления (5.21) оператора дифференцирования при $\mathfrak{M} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{Z}$

В шестом разделе найдем(нашли) величину оптимального восстановления оператора дифференцирования в метрике пространства $L_2$ на классах функций, у которых значение итерированного оператора Лапласа принадлежит $L_2$, также рассмотрим(ли) соответствующие задачи.

**Теорема 6.4.** Для любых целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$, $m, k, n$ при выполнении условий

$$k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, 0 < k < 2n,$$

для любого $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\nu_\delta \mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathscr{Z}) = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \delta^{\frac{2n-k}{2n}}.$$

Оператор (6.8) при $h = \delta^{\frac{1}{2n}}$ является экстремальным в задаче восстановления для $\mathfrak{M} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{M} = \mathscr{Z}$.

В седьмом разделе приведены формулировки соответствующих результатов для итерированного и для $k$ – итерированного оператора Лапласа.

**Следствие 7.4.** Пусть $k$, $m$, $n$ – целые неотрицательный числа, $0 \leqslant k < n - m/4$. Тогда, при При любом $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\nu_\delta(\mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathscr{L}) = \Big(\frac{4na}{4n-2k-m}\Big)^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \cdot \Big(\frac{4nb}{2k+m}\Big)^{\frac{2k+m}{4n}} \cdot \delta^{\frac{4n-2k-m}{4n}}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{4n-4k-m}{2^{m+1} n^2 \pi^{\frac{m-2}{2}} (\frac{m-2}{2})! \sin \pi \frac{4k+m}{4n}}},$$
$$b = \sqrt{\frac{4k+m}{2^{m+1} n^2 \pi^{\frac{m-2}{2}} (\frac{m-2}{2})! \sin \pi \frac{4k+m}{4n}}},$$

если $m$ – четное и

$$a = \sqrt{\frac{4n-4k-m}{2^{\frac{m+5}{2}} n^2 \pi^{\frac{m-1}{2}} (m-2)!! \sin \pi \frac{4k+m}{4n}}},$$
$$b = \sqrt{\frac{4k+m}{2^{\frac{m+5}{2}} n^2 \pi^{\frac{m-1}{2}} (m-2)!! \sin \pi \frac{4k+m}{4n}}},$$

если $m$ – нечетное.

**Следствие 7.7.** Для любых натуральных чисел $k, n$, связанных соотношением $0 < k < 2n$ и для любого $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\nu_\delta \mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathscr{L}) = \delta^{\frac{n-k}{n}}.$$

Оператор $T_h$ при $h = \delta^{\frac{1}{n}}$ является экстремальным в задаче восстановления для $\mathfrak{M} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{M} = \mathscr{L}$.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе нашли оптимальное восстановление операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами на заданных классах, построили операторы оптимального восстановления, а также рассмотрели задачи тесно связанные с данными, а именно, рассмотрели решение экстремальных задач типа Ландау-Колмогорова,задачу С.Б.Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Арестов, В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора/ В.В. Арестов// Матем.заметки. 1977. Т. 22, №2. С. 231–244.

2. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректный задачах математической физики/ М.М. Лаврентьев. Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1962.

3. Тихонов, А.Н., Иванов, В.К., Лаврентьев, М.М. Некорректно поставленные задачи. Дифференц. уравн. с частн. производными, Тр. симпозиума/ А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев// М.: Наука, 1970. С. 224–238.

4. Бахвалов, Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов нв выпуклых классах функций/ Н.С.Бахвалов// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1971. Т. 11, №4. С. 1014–1016.

5. Морозов, В.А. Линейные и нелинейные некорретные задачи, Итоги науки и техники, Матем. анализ./ В.А. Морозов Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1973. С. 129–178.

6. Тихонов, А.Н., Арсенин, В.Я. Методы решения некорректных задач/ А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. М.: Наука, 1974.

7. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач/ В.А. Морозов. М.: Издательство МГУ, 1974.

8. Иванов, В.В. Об оптимальных по точности алгоритмах приближенного решения операторных уравнений 1-го рода/ В.В. Иванов// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1975. 15, №1. С.3–11.

9. Марчук, А.Г., Осиенко, К.Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек / А.Г. Марчук, К.Ю. Осиенко// Матем. заметки. 1975. 17, №3. С. 359–368.

10. Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н Сплайны в вычислительной математики/С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. М.: Наука, 1976.

11. Гребенников, А.И., Морозов, В.А. Об оптимальном приближении операторов /А.И. Гребенников, В.А. Морозов// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1977. 17, №1, С. 3–14.

12. Иванов, В.К., Королюк, Т.И. Об оценке погрешностей при решении линейных некорректных задач/ В.К. Иванов, Т.И. Королюк// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1969. 9, №1, С. 30–41.

13. Иванов, В.К. Об оценке погрешностей при решении операторных уравнений первого рода. Сб. Вопросы точности и эффект. вычисл. алгоритмов, Т.2. / В.К. Иванов// Киев: Изд-во АН УССР, 1969. С. 102–116.

14. Танана, В.П. Об оптимальности нелинейных методов при решении линейных неустойчивых задач. Сб. Оптимизация вычисл. методов., Тр. Ин-та кибернетики Укр. АН / В.П. Танана. Киев: Изд-во АН УССР, 1974. С. 52-58.

15. Страхов, В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве. Дифф. уравнения /В.Н. Страхов// 1970. 6, №8. С. 1490–1495.

16. Стечкин, С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов/ С.Б. Стечкин// Матем. заметки. 1967. 1, №2. С. 137-148.

17. Тимофеев, В.Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных /В.Г. Тимофеев // Матем.заметки. 1985. Т. 37, №5. С. 676–689.

18. Стечкин, С. Б. Неравенства между нормами производных произвольной функции/ С. Б. Стечкин// Acta Scient. Math. Szeged. 1965. Т. 26. С. 225–230.

19. Стечкин, С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов/ С.Б.Стечкин// Матем. заметки. 1967. Т. 1, №2. С.137–148.

20. Будак, Б.М., Самарский, А.А.,Тихонов, А.Н. Сборник задач по математической физике/ Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1972. С. 688.