Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Функции Хаара

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Малянова Романа Леонидовича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ______________________ Матвеева Ю.В.

Зав. кафедрой
д.ф.м.н., профессор ______________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

Введение. Ортонормированная на отрезкек $[0, 1]$ полная в пространстве $L[0, 1]$ последовательность функций $\{\chi_n(x)\}$, называемых обычно функциями Хаара, была построена в диссертации известного венгерского математика Альфреда Хаара ($Alfred\ Haar, 1885 - 1933$) в 1909 году. Непосредственно поводом для построения данной функции послужило известное свйство тригонометрической системы, о существовании рядов Фурье от непрерывных функций, расходящихся в отдельных точках. Выглядит это свойство следующим образом:

Любая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ *функция* $f(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x)$$

Вопрос, а является ли это свойство общим для всех ортонормированных полных систем, подтолкнул Хаара к построеннию системы $\{\chi_n(x)\}$, которая обладает тем свойством, что ряд Фурье по этой системе от любой непрерывной функции сходится к ней равномерно.

Позднее в 1928 году Шаудер доказал, что система Хаара является базисом в пространстве $L^p(0, 1)$ при всех $p \geq 1$, а Марцинкевич в 1937 году установил, что она будет безусловным базисом в пространстве $L^p(0, 1)$ при $p > 1$. Другое, более краткое, доказательство теоремы Марцинкевича изложил В.Ф. Гапошкин в 1974 году в своей работе.

Систематическое изучение системы Хаара в СССР было начато П.Л. Ульяновым. Приведем некоторые доказанные им теоремы.

В 1961 году получен первый результат о безусловной сходимости почти всюду рядов Фурье: П.Л. Ульянов доказал, что система Хаара не является системой безусловной сходимости. В работах 1961 и 1963 годах установленно, что для того, чтобы возрастающая последовательность $\omega(n)$ являлась множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду рядов по системе Хаара, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} < \infty$. А также получены необходимые и достаточные условия безусловной сходимости почти всюду рядов Фурье—Хаара с монотонными коэффициентами.

В работе 1964 года доказано, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m \chi_m(x)$ с монотонными коэффициентами сходится почти всюду на множестве положительной меры тогда и только тогда, когда $\{c_m\} \subset l_2$, и при этом он будет рядом Фурье некоторой функции $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$. Теоремы единственности для рядов с монотонными коэффициентами установлены в работе 1983 года. Результаты о коэффициентах Фурье—Хаара от суперпозиции функций, принципиально отличные от результатов для тригонометрической системы, содержатся в работах 1983 и 1985 годах.

В дальнейшем исследования П.Л. Ульянова были продолжены многими отечественными и зарубежными математиками, в числе которых А.М. Олевский, А.А. Талалян, Б.И. Голубов, В.Г. Кротов, С.В. Бочкарев, В.А. Скворцов, Ф.Г. Арутюнян, Г. Алексич, К. Тандори, Ф. Мориц, Б.С. Кашин, В.М. Бугадзе, В.И Прохоренко и другие. Большинство работ связано с теорией функций действительного переменного и с теорией ортогональных рядов. К примеру, изучается характер сходимости ряда, изложенного ранее, в зависимости от свойств $f(x)$ или от свойств коэффициентов c_n.

До недавнего времени область применений функций Хаара ограничивалась теорией функций и функциональным анализом, где использовался тот факт, что система $\{\chi_n(x)\}$ образует базис в некоторых функциональных пространствах.

В последнее десятилетие интерес к функции Хаара значительно возрос в связи с тем, что она оказалась полезной в решении некоторых выжных вопросов общей теории ортогональных рядов и нашла применение в прикладной математике — используются для работ по многомерным квадратурам, а так же для построения интерполяцонных формул — в теории вероятностей, функции встречаются при изучении изотропной турбулентности — в теории равномерного распределения и в других областях.

Цель данной работы заключается в исследовании системы Хаара. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

— дать основные определения, касающиеся системы Хаара;

— описать основные свойства функций системы Хаара;

— исследовать поведение функций, принадлежащих системе Хаара в пространствах $C[0,1]$ и $L^p(0,1)$.

Основное содержание работы. Прежде чем определить систему Хаара, введем стандартные обозначения двоичных интервалов, которые будут использоваться в дальнейшем на протяжении всего доклада.

Двоичными будем называть непересекающиеся интервалы, которые могут быть получены путем деления отрезка $[0,1]$ на 2^m равных частей.

Будем считать все эти интервалы открыты слева, если их левый конец отличен от 0 и открытыми справа, если их правый конец отличен от 1.

Пример двоичных интервалов: $[0,1]$; $(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1); ...$

Для двоичных интервалов введем следующее обозначение: $\left(\frac{i-1}{2^m},\frac{i}{2^m}\right)$, где $i=\overline{1,2^m}$, $m=\overline{0,\infty}$.

Для $n = 2^m + i,\ i = \overline{1, 2^m},\ m = \overline{0, \infty}$ обозначим:

$$\Delta_n = \Delta_m^i = \left(\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right); \quad \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]; \qquad \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1); \quad \overline{\Delta}_1 = [0,1]. \tag{2.1}$$

Если $\delta \subset (0,1)$ — какой-либо интервал, то через δ^+ и δ^- обозначаются соответственно левая и правая половины интервала δ (без включения средней точки). В частности $(n = 2^m + i)$,

$$\begin{aligned} \Delta_n^+ &= (\Delta_m^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^m}, \frac{2i-1}{2^{m+1}}\right) = \Delta_{m+1}^{2i-1}; \\ \Delta_n^- &= (\Delta_m^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{m+1}}, \frac{i}{2^m}\right) = \Delta_{m+1}^{2i}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отметим для дальнейшего следующие простые свойства семейства двоичных интервалов:

1) $\Delta_m^i \bigcap \Delta_m^j = \varnothing$ при $i \neq j,\ i,j = 1, 2, ..., 2^m,\ m = \overline{1, \infty}$

2) Если Δ_n и Δ_m — двоичные интервалы и $\Delta_n \bigcap \Delta_m \neq \varnothing$, то либо $\Delta_n \subset \Delta_m$, либо $\Delta_m \subset \Delta_n$.

1−е свойство вытекает из определения двоичных интервалов, так как индексы $i \neq j$, следовательно Δ_m^i и Δ_m^j – это разные интервалы одного отрезка разделенного на m частей.

2−е свойство вытекает из того, что при $n = 2^m + i$, $k = 2^l + j$, $m \geq l$, в силу равенства

$$\Delta_l^j = \left(\frac{i-1}{2^l}, \frac{i}{2^l}\right) = \left(\frac{2^{m-l}(i-1)}{2^m}, \frac{2^{m-l}i}{2^m}\right),$$

либо $\Delta_k \subset \Delta_n$ (если $2^{m-l}(i-1) < i \leq 2^{m-l}$), либо $\Delta_k \bigcap \Delta_n = \varnothing$ (если $i \leq 2^{m-l}(j-1)$ или $i > 2^{m-l}j$).

Определение. 18. *Система Хаара — это полная, ортонормированная система функций $\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^m < n \leq 2^{m+1}$, $m = \overline{0, \infty}$ определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \overline{\Delta}_n; \\ 2^{\frac{m}{2}}, & \text{если } x \in \Delta_n^+; \\ -2^{\frac{m}{2}}, & \text{если } x \in \Delta_n^-; \\ \lim\limits_{\delta \to +0} \chi_n(\delta), & \text{если } x = 0; \\ \lim\limits_{\delta \to +0} \chi_n(1-\delta), & \text{если } x = 1; \\ \lim\limits_{\delta \to 0} \left(\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)\right)/2, & \text{для остальных } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Для каждого фиксированного $m = \overline{0, \infty}$, *множество функций* $\{\chi_n(x)\}_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}$ *называют* m*-ой пачкой.*

Поэтому можно утверждать, что система Хаара состоит из объединения пачек $\{\chi_m^{(i)}(x)\}_{i=1}^{2^m}$, при $m = \overline{0, \infty}$, и функции $\chi_0^{(0)}(x)$.

Выражение для частных сумм $S_N(f, x)$ ряда Фурье—Хаара:

$$S_N(f, x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\chi_n(x),$$

Для частных сумм $S_N(f, x)$ с номерами $N = 2^m + i$, при следующих обозначениях $i = 1, 2, ..., 2^m - 1$, $m = \overline{1, \infty}$, учитывая $1-$е свойство двоичных интервалов, получим следующее выражение:

$$S_N(f, x) = \begin{cases} S_{2^{m+1}}(f, x), & \text{если } x \in \left[0, \frac{i}{2^m}\right); \\ S_{2^m}(f, x), & \text{если } x \in \left(\frac{i}{2^m}, 1\right]; \\ S_{2^m}(f, x) + c_N \chi_N(x), & \text{если } x = \frac{i}{2^m}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Замечание. *Верно следующее равенство равенство при* $N = \overline{2, \infty}$:

$$S_N(f, x) = \begin{cases} |\Delta_N^+|^{-1}, & \textit{при } x \in \Delta_N^+; \\ |\Delta_N^-|^{-1}, & \textit{при } x \in \Delta_N^-. \end{cases} \tag{2.11}$$

Замечание. *Для* $f(x) \in \mathrm{V}(0, 1)$ *будет верна следующая оценка:*

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \le 3\delta \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f). \tag{3.1}$$

Теорема. 3. *Пусть* $f(x)$ — *измеримая функция на интервале* $(0, 1)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Если $f(x) \in L^p(0, 1)$, $1 \le p < \infty$;

$$|c_n(f)| \le n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \omega^{(p)} \left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n > 1, \tag{3.5}$$

2) Если $f(x) < M$, *при всех* $x \in (0, 1)$;

$$|c_n(f)| \le \frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{n}}, \quad n \ge 1, \tag{3.6}$$

3) Если $f(x) \in C(0, 1)$;

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{\sqrt{2n}} \omega \left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n > 1, \tag{3.7}$$

4) Если $f(x) \in L(0,1)$;

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |c_n(f)| \le \sqrt{2^m}\omega^{(1)}\left(\frac{1}{2^{m+1}}, f\right), \quad m \ge 0, \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{|c_n(f)|}{\sqrt{n}} \le \omega^{(1)}\left(\frac{1}{2^{m+1}}, f\right), \quad m \ge 0, \tag{3.9}$$

5) Если $f(x) \in \mathrm{V}(0,1)$; *где* $\mathrm{V}(0,1)$ *это класс функций с ограниченным изменением на* $(0,1)$, *а вариация функции* $f(x)$ *на интервале* $(a,b) \subset (0,1)$ *обозначим через* $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$.

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |c_n(f)| \le \frac{3\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f)}{2\sqrt{2^m}}, \quad m \ge 0, \tag{3.10}$$

$$|c_n(f)| \le \frac{3\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f)}{\sqrt{m}}, \quad m > 1. \tag{3.11}$$

Пусть на отрезке $[0,1]$ задана произвольная интегрируемая, непрерывная функция $f(x)$. Множество всех таких функций обозначается через $C(0,1)$. В этом множестве вводится норма

$$\|f\|_C = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|. \tag{4.1}$$

Теорема. 4. *Для произвольной функции* $f \in C(0,1)$ *ее ряд Фурье—Хаара сходится к* $f(x)$ *равномерно на* $[0,1]$. *При этом:*

$$\rho_C(f,N) \equiv \|f - S_N(f)\|_C \le 3\omega\left(\frac{1}{N}, f\right), \quad N \ge 1. \tag{4.2}$$

Теорема. 5. *Для коэффициентов Фурье по системе Хаара каждой функции* $f \in C(0,1)$, $f \ne const$, *справедливо соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f)| n^{\frac{3}{2}} > 0$$

Теорема. 6. *Система Хаара — является базисом в любом пространстве* $L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$. *При этом*

$$\begin{gathered}\rho_p(f,N) \equiv \|f - S_N(f)\|_p \le C_p \omega_p\left(\frac{1}{N}, f\right); \quad N = \overline{1,\infty}; \\ (C_p = 4^{\frac{1}{p}}(1+2^p)^{\frac{1}{p}}).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Теорема. 7. *Ряд Фурье—Хаара каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *сходится к* $f(x)$ *почти всюду на* $(0,1)$. *При этом для мажоранты частных сумм ряда*

$$S^*(f,x) \equiv S^*_\chi(f,x) = \sup_{1 \le N < \infty} |S_N(f,x)| \tag{5.3}$$

справедливы неравенства:

a) $m\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > y\} \le \frac{C}{y}\|f\|_1$

b) $\|f\|_p \le \|S^*(f)\|_p \le C_p\|f\|_p, \quad f \in L^p(0,1), \quad 1 < p \le \infty.$

Изучение безусловной сходимости рядов Фурье—Хаара в $L^p(0,1)$ сводится к изучению свойств линейных операторов $T_\epsilon(f)$, где

$$T_\epsilon(f,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n c_n(f) \chi_n(x), \quad x \in (0,1), \tag{5.8}$$

а $\epsilon = \{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\epsilon_n = \pm 1$, — некоторая последовательность "знаков".

Ясно, что так как $\{\chi_n(x)\}$ — ортонормированная система, то операторы $T_\epsilon(f)$ — изометрические операторы из $L^2(0,1)$ в $L^2(0,1)$, т.е.:

$$\|T_\epsilon(f)\|_2 = \|f\|_2, \quad f \in L^2(0,1). \tag{5.9}$$

Теорема. 10. *Пусть* $f \in L^1(0,1)$. *Тогда для любой последовательности* $\epsilon = \{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\epsilon_n = \pm 1$, *ряд (5.8) сходится по мере к некоторой функции* $T_\epsilon(f)$ *конечной почти всюду. При этом для любого* $y > 0$

$$k\{x \in (0,1) : \ |T_\epsilon(f,x)| > y\} \le \frac{3}{y}\|f\|_1. \tag{5.12}$$

Заключение. Итак, в данной работе выполнены поставленные цель и задачи: даны основные определения, касающиеся системы Хаара; доказаны теоремы о сходимостях ряда Фурье-Хаара в различных пространствах, описаны свойства функций системы Хаара, исследовано поведение функций принадлежащих системе Хаара в пространствах $C[0,1]$ и $L^p(0,1)$.

В заключении, системы функций Хаара находят широкое применение в самых различных областях науки и техники при решении обширного класса теоретических и прикладных задач. Связано это с рядом замечательных свойств этих базисных функций и существованием для них высокоэффективных вычислительных алгоритмов. Немаловажное значение имеет и возможность обобщения данных функций на случай представления чисел в системе счисления с произвольным основанием.

Список использованных источников

1. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 937 с.

2. Ульянов, П.Л. О рядах по системе Хаара / матем. сб. М. : Наука, 1964. т. 63(105). С. 356–391.

3. Ульянов, П.Л. Ряды по системе Хаара. М. : Наука, 1965. С. 35–43.

4. Голубов, Б.И. Ряды по системе Хаара // итоги науки. Серия Математика. Математический анализ. М. : ВИНИТИ, 1970. С. 109–146.

5. Бочкарев, С.В. О коэффициентах рядов Фурье по системе Хаара // матем. сб. М.: Наука, 1969. т. 80(122). С. 97–116.

6. Ульянов, П.Л. О некоторых свойствах рядов по системе Хаара // матем. заметки М. : МЦНМО, 1967. т. 1, вып. 1. С. 17–24.

7. Ульянов, П.Л. О некоторых результатах и задачах из теории базисов // зап. научн. сем. ЛОМИ М. : Наука, 1989. т. 170. С. 274–284.

8. Балашов, Л.А. О рядах по системе Хаара // матем. заметки М. : МЦНМО, 1971. т. 10, вып. 4. С. 369–374.

9. Ульянов, П.Л. О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // изв. АН СССР. Сер. матем. М. : Наука, 1964. т. 28, вып. 4. С. 925–950.

10. Голубов, Б.И. О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // изв. АН СССР. Сер. матем. М. : Наука, 1964. т. 28, вып. 6. С. 1271–1296.

11. Гапошкин, В.Ф. О системе Хаара как безусловном базисе в $L_p[0,1]$ // матем. заметки М. : МЦНМО, 1974. т. 15, вып. 2. С. 191–196.

12. Акишев, Г.А. Обобщенная система Хаара и теоремы вложения в симметричные пространства // фундамент. и прикл. матем. М. : Интуит, 2002г. т. 8, вып. 2. С. 319–334.

13. Соболь, И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара / ред. В.М. Гринбер; под тех. ред. В.Н. Кондакова // М. : Наука, 1969. 288 с.

14. Соболь, И.М. Функции многих переменных с быстро сходящимися рядами Хаара // ДАН СССР М. : Наука, 1960. С. 773-776.

15. Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / Г. Штейнгауз; пер. Р.С. Гутера, П.Л. Ульянова; под ред. В.Н. Виленкина М. : Физматгиз, 1958. т. 132, вып. 4. 507 с.

16. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / С.В. Фомин М. : Наука, 1976. 542 с.

17. Матвеев, В.А. О коэффициентах Фурье-Хаара / изв. ВУЗов. Матем. М. : Наука, 1965. № 6. С. 103–112.

18. Ильин, В.А. Математический анализ : нач. курс 2-е изд. / В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов; под ред. А. Н. Тихонова М. : Изд-во МГУ, 1985. С. 662.

19. Стечкин, С.В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // изв. АН СССР. Сер. матем. М. : Наука, 1953. т. 17, вып. 1. С. 87–98.

20. Стечкин, С.В. Абсолютная сходимость рядов Фурье // изв. АН СССР. Сер. матем. М. : Наука, 1955. т. 19, вып. 4. С. 221–246.