Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Свойства субгармонических функций и вычисление гармонических функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Механико-математического факультета

Мальшакова Антона Игоревича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Прохоров Д.В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

«Одной из самых красивых глав классического анализа является теория суб- и супергармонических функций». Это слова из предисловия Е. Б. Дынкина к переводу книги Дж. А. Ханта. Субгармонические функции были введены в анализ Ф. Гартогсом и Ф. Риссом. В одной из первых монографий по теории субгармонических функций И. И. Привалов писал следующее: «После того, как теория субгармонических функций достаточно развилась, естественно возникает вопрос о приложении их как общего класса фукций к теории функций одного комплексного переменного. Этот новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, с одной стороны дает упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны позволяет сформулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций».

Теория субгармонических функций является активно развивающейся областью современной математики. Исследованиям в этой области посвящены многочисленные работы. Она находит свои приложения в теории функций комплексного переменного, в теории потенциала, в теории случайных процессов, в геометрии. Поэтому получение любого нового результата в этой области является актуальной задачей как для самой математики, так и для её приложений.

В данной работе мы дадим определение и установим простейшие свойства субгармонических функций. Эти функции связанны с гармоническими точно так же, как выпуклые функции одного переменного связанны с линейными. Вслед за определениями мы доказываем принцип максимума модуля, который является одним из ключивых свойств субгармонических функции. Далее будут расмотренны: теорема Адамара о трех кругах, теорема о двух константах,и теорема Фрагмена-Линделефа. Эти теоремы играют важную роль.А так же решен практический пример в пакете Wolfram Mathematica.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Определение 1. Функция действительного переменного, определенная в некотором интервале (a, b), называется аналитической в точке x_0 этого интервала, если в некоторой окрестности точки x_0 ее можно представить в виде суммы сходящегося ряда, расположенного по степеням $x - x_0$:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots .$$

Определение 2. Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

называется уравнением Лапласа, а функции, обладающие непрерывными частными производными первого и второго порядков в некоторой области и являющиеся его решениями, называются гармоническими в этой области функциями.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(z)$ балы аналитической в области, необходимо и достаточно , чтобы ее действительная и мнимая части были сопряженными гармоническими функциями в этой области.

В основе наших рассмотрений лежит обобщение понятия гармонической функции:

Определение 3. Действительная функция $h(x, y)$ называется субгармонической в области G, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) она определена и непрерывна во всех точках области G, за исключением, быть может, конечного числа точек или точек некоторой последовательности $\{(x_n, y_n)\}$, не имеющих предельный точек внутри G; при этом для каждой исключительной точки (x_n, y_n) выполнено соотношение

$$\lim_{(x,y)\to(x_n,y_n)} h(x, y) = -\infty,$$

на основании которого полагаем:

$$h(x_n, y_n) = -\infty;$$

В определении субгармонической функции заменяется другим, более общим:

$$h(x_0, y_0) \geqslant \overline{\lim}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y)$$

2) для каждой точки (x, y) и всех достаточно малых ρ справедливо неравенство

$$h(x, y) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(x + \rho\cos\alpha, y + \rho\sin\alpha)\, d\alpha. \tag{0.1}$$

Лемма 1. Если $h(z)$ - действительная функция, определенная в некоторой ограниченной области G, и $M = \sup\limits_{z\in G} h(z)$ (M может равняться бесконечности), то в замкнутой области $\overline{G}$ существует по крайней мере одна точка, в любой окрестности которой верхняя грань функции $h(z)$ равна M.

Лемма 2. (основная). Если $h(z)$- функция, субгармоническая в ограниченной области G, и в каждой точки ξ, граничной для области G, выполняется отношение

$$\overline{\lim_{z\to\xi}} h(z) \leqslant 0,$$

то $h(z) \leqslant 0$ во всех точках области G, причем знак равенства для какой-либо внутренней точки возможен лишь в случае, когда $h(z) \equiv 0$.

Теорема 2. Действительная функция $u(x, y)$, непрерывная в области G и удовлетворяющая в каждой точке $z_0 \in G$ соотношению

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha)d\alpha, 0 < \rho < \rho_0 = \rho_0(z_0),$$

где

$$0 < \rho < \rho_0 = \rho_0(z_0),$$

является гармонической в этой области.

Теорема 3. (Обобщенный принцип максимума модуля.) Пусть $h(x, y) = h(z)$ -функция, субгармоническая в ограниченной области G, и $u(x, y) = u(z)$ - функция гармоническая в области G. Если для каждой граничной точки ξ области G,за исключением, быть может, конечного числа точек $\xi_1, \ldots, \xi_m$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{z\to\xi}}[h(z) - u(z)] \leqslant 0, \tag{0.2}$$

причем для каждой точки $\xi_1 (j = 1, \ldots, m)$

$$\overline{\lim_{z\to\xi}}[h(z) - u(z)] < +\infty, \tag{0.3}$$

то всюду внутри G выполняется неравенство

$$h(z) \leqslant u(z),$$

в котором равенство для какой-либо внутренней точки области достигается только в том случае, когда

$$h(z) \equiv u(z).$$

Теорема 4. Логарифм максимума модуля функции, аналитической в круговом кольце D, является выпуклой функцией логарифма радиуса той окружности, на которой берется максимум.

Предложение 1. Если для каждой граничной точки $\xi \neq \xi_0$ в области G выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{z \to \xi}} |f(z)| \leqslant C, \tag{0.4}$$

а в точке ξ_0

$$\overline{\lim_{z \to \xi_0}} |f(z)| < \infty, \tag{0.5}$$

то $|f(z)| \leqslant C$ во всех точках G, причем равенство $|f(z_0)| = C(z_0 \in G)$ возможно только тогда, когда $f(z) \equiv const$.

Теорема 5. (Фрагмена-Линделёфа) Пусть G есть угол раствора $\alpha\pi(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ и $f(z)$ - функция, аналитическая в области G и удовлетворяющая условиям:

1) для каждой конечной точки ξ, граничной для области G,

$$\overline{\lim_{z \to \xi}} |f(z)| \leqslant C(< \infty); \tag{0.6}$$

2)

$$\rho = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \frac{1}{\alpha}, \tag{0.7}$$

где

$$M(r) = max[e, \sup_{|z|=r} |f(z)|] \qquad (z \in G).$$

Тогда

$$|f(z)| \leqslant C$$

в области G, причем знак равенства во внутренней точке этой области возможен только в случае, когда $f(z) \equiv const$.

Теорема 6. Пусть G - угол раствора $\alpha\pi(0 < \alpha \leqslant 2)$ и $f(z)$ - функция, аналитическая в этой области и удовлетворяющая условиям:

1) для каждой конечной точки ξ, граничной для области G,

$$\overline{\lim_{z \to \xi}} |f(z)| \leqslant C;$$

2)

$$\underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0.$$

Тогда

$$|f(z)| \leqslant C$$

в области G, причем из того, что $|f(z_0)|, z_0 \in G$, вытекает, что $f(z) \equiv const$.

Теорема 7. Пусть D есть полоса шириной $h\pi$:

$$-\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2},$$

и $f(z)$ функция аналитическая в области D и удовлетворяющая условиям:

1) для каждой конечной точки ξ, лежащей на границе D,

$$\overline{\lim_{z\to\xi}}|f(z)| \leqslant C(< \infty)$$

и, кроме того,

$$\overline{\lim_{x\to-\infty}}|f(x+iy)| \leqslant C;$$

2)

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty}\frac{\ln\mu(x)}{\exp\frac{x}{h}} \leqslant 0,$$

где $\mu(x) = \max[1, \sup|f(x+iy)|], \quad -\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2}$.

Тогда в области D имеет место неравенство

$$|f(z)| \leqslant C,$$

причем равенство в точке $z_0 \in D$ возможно лишь при условии, что $f(z) \equiv const$.

Рассмотрен пример

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi-t)+r^2}dt$$

при

$$z = re^{i\phi} \qquad u(t) = |t-t^3|, -\pi \leqslant \phi \leqslant \pi, 0 < r < 1.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены основные свойства субгармоническтх функций, даны основные определения, доказаны теоремы такие как, теорема Адамара, теорема о двух константах, теорема Фрагмена-Линделёфа и её обобщения. Подсчитан пример в пакете Wolfram Mathematica.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций. т. 2: Дальнейшее построение теории. / А. И. Маркушевич // Изд. 2-е, испр. и доп. -М.: Наука. 1968. С. 624.

2 Брело, М. Основы класической теории потонциала / перев. с фр. Е. Д. Соломенцева // М.: Мир. 1964. С. 135.

3 Ландкоф, Н.С. Основы современной теории потенциала / Н.С.Ландков // М.: Наука. 1966. С. 240.

4 Привалов, И.И. Субгармонические функции / И. И. Привалов // М.: ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. технико-теорет. лит., 1937. С. 120.

5 Стойлов, С. Теория функции коплексного переменного, т. 2 / С. Стойлов // М.: Издательство иностранной литературы. 1962. С. 74.

6 Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменнго / Г.М. Голузин // изд. 2. М.: Издательство иностранноьй литературы. 1966. С. 113.

7 Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной. / А. Н. Тихонов // М.: Наука, 1967. С. 145

8 Титчмарш, Е. Теория функций. / Е. Титчмарш // М.: Наука. 1980. С. 207.

9 Евграфов, М.А. Аналитические функции. / М. А. Евграфов // М.: Наука. 1968. С. 60.

10 Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. / Б. В. Шабат // М.: Наука. 1969. С. 157.

11 Хейман, У. Субгармонические функции / У. Хейман, П. Кеннеди // М.: Мир. 1980. С. 193.

12 Дженкинс, Дж. Однолистные функции и конфориные отображения / перев. с англ. Б. В. Шабата / М.: Издательство иностранной литературы. 1962. С. 141.

13 Лаврентьев, М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики / М. А. Лаврентьев // Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1946. С. 80.

14 Привалов, И. И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов // Изд. 2. ГИТТЛ. 1950. С. 163.

15 Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян // М.: Наука. 1966. С. 672.

16 Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов // М.: Наука. 1979. С. 127.

17 Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер // М.: Наука. 1970. С. 180.

18 Гурвиц, А. Теория аналитических и эллиптических функций / перев. с 3-го нем. изд. Н. В. Икорникова // Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1933. С. 204.

19 Владимиров, В. С. Методы теории функкий многих комплексных переменных / В. С. Владимиров // М.: ИЛ. 1951. С 78.

20 Лаврентьев, М. А. методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат // Изд. 3-е Физматгиз. 1964. С. 213.

21 Фукс, Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы. / Б. А. Фукс, В. И. Левин // Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1951. С. 214.