Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Наилучшее приближение оператора дифференцирования

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Корчагиной Анастасии Вячеславовны

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент ________________ Тимофеев В.Г.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор ________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

Введение

Данная работа посвящена решению задачи Стечкина: исследованию наилучшего приближения операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами на некоторых классах функций. Эта задача тесно связана с неравенствами типа Ландау-Колмогорова, то есть с неравенствами вида

$$\|u^{(k)}\|_{L_q} \leqslant A \cdot \|u\|_{L_r}^{\alpha} \cdot \|u^{(n)}\|_{L_p}^{\beta}, \tag{0.1}$$

где $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ и $0 \leqslant k < n$ – целые числа; $u \in L_r, u^{(n)} \in L_p$ и $(n-1)$–я производная функции u – локально абсолютно непрерывна на числовой оси; α, β, A – постоянные, не зависящие от u. В некоторых случаях решение задачи Стечкина позволяет получить решение задачи (0.1). Эти случаи рассмотрены, например, в работах Арестова, Стечкина, Субботина и Тайкова, Тайкова, Габушина, Бердышева.

Впервые задачу о наилучшем приближении оператора дифференцирования, а в общем случае неограниченного оператора, линейными ограниченными операторами изучал С. Б. Стечкин. В частности он заметил, что она связана с задачей о наименьшей константе в неравенстве между нормами производных функций. В дальнейшем эти вопросы изучали Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков, В. Н. Габушин, В. В. Арестов и др. Изучение этой задачи происходило в тесной взаимосвязи с исследованием экстремальных задач теории приближений функций, теории некорректных задач, вычислительной математики. Данные, полученные при решении этой задачи, активно используются при рассмотрении многих смежных вопросов.

Актуальность данной работы состоит в том, что задача Стечкина тесно связана с теорией некорректных задач, а именно, с задачей об оптимальной равномерной регуляризации вычисления значений неограниченного оператора на элементах, заданных с ошибкой. Знание экстремального оператора в задаче Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на классе функций u таких, что $u \in L_r, u^{(n)} \in L_p$, $(n-1)$ - я производная функции u – локально абсолютно непрерывна на числовой оси и $\|u^{(n)}\|_{L_p} \leqslant 1$, дает возможность их использования при решении соответсвующих задач восстановления оператора дифференцирования на множестве элементов, известных с заданной погрешностью.

Цели работы: построить операторы наилучшего приближения; получить оценку величины наилучшего приближения неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства; найти наилучшее приближение оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами.

Основные методы решения в исследуемых задачах – метод оптимальных интегральных представлений и метод функций Грина. Также был задействован математический аппарат функционального анализа.

Объем работы составяет 53 страницы. Основная часть данной работы состоит из четырех разделов. Первый раздел: "История развития вопроса наилучшего приближения оператора дифференцирования". Второй раздел: "Задача о наилучшем приближении операторов дифференцирования функции одной переменной в равномерной метрике". Третий раздел: "Задача о наилучшем приближении операторов дифференцирования функции многих переменных в равномерной метрике". Четвертый раздел: "Наилучшее приближение оператора дифференцирования из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$". Список использованных источников включает в себя 23 наименования.

Основное содержание работы

Основная часть данной работы состоит из четырех разделов. Первый раздел посвящен истории развития вопроса наилучшего приближения оператора дифференцирования. В этом разделе ставится задача, предшествующая вопросу наилучшего приближения дифференциального оператора – задача наилучшего приближения линейного неограниченного оператора U, действующего из X в Y с областью определения $D_U \subset X$, где X, Y – банаховы пространства, всевозможными линейными ограниченными операторами S с нормой, не превосходящей числа $N > 0$, на заданном классе Q, некотором классе элементов из X, таком что $Q \subset D_U$:

$$E_N(U;Q) = \inf_{\|S\| \leqslant N} R(U,S;Q) = \inf_{\|S\| \leqslant N} \sup_{x \in Q} \|Ux - Sx\|_Y, \qquad (1.2)$$

где $\|S\|$, по определению, норма оператора S, действующего из X в Y.

Примером такой задачи является задача оценки погрешности различных формул численного дифференцирования для тех или иных классов функций Q. Результаты исследований, полученные в данном направлении, показывают, что неограниченные операторы могут быть приближены ограниченными операторами на достаточно узких и определенным образом нормированных классах Q.

Случай, когда класс Q определяется при помощи некоторого линейного оператора, является одним из наиболее важных частных случаев задачи (1.2). Пусть Z – банахово пространство и V – линейный (неограниченный) оператор из X в Z с областью определения $D_V \subset X$ и $D_V \subset D_U$. Тогда определим класс Q следующим образом

$$Q = x \in X : \|Vx\|_Z \leqslant 1$$

и вместо $E_N(U;Q)$ в этом случае объектом изучения является величина

$$E_N(U,V) = \inf_{\|S\|\leqslant N} \sup_{\|Vx\|_Z\leqslant 1} \|Ux - Sx\|_Y.$$

Если для оператора S

$$\sup_{\|Vx\|_Z\leqslant 1} \|Ux - Sx\|_Y < \infty,$$

то

$$\forall x \in D_V \ Vx = 0 \Rightarrow Sx = Ux,$$

и S интерполирует U на ядре оператора V. В такой форме задача тесно связана с изучением свойств пары операторов (U,V), в частности с неравенствами между нормами производных.

Произведена оценка величины наилучшего приближения через функцию

$$\Phi(M) = \Phi(M;U;Q) = \sup_{\substack{x\in Q \\ \|x\|_X\leqslant M}} \|Ux\|_Y \ (M \geqslant 0). \tag{1.3}$$

В частности, получены неравенства:

$$E_N(U;Q) \geqslant \sup_{M\geqslant 0}\{\Phi(M) - NM\} \tag{1.5}$$

и

$$\Phi(M) \leqslant \inf_{N\geqslant 0}\{E_N(U;Q) + NM\}. \tag{1.6}$$

Неравенство (1.5) обращается в равенство, если существуют элемент $x^* \in K$ и линейный ограниченный оператор S^*:

$$\|x^*\| = M,\ \|Ux^*\| = \Phi(M);$$

$$\|S^*\| = N = \Phi'(M),\ \|S^*x^*\| = NM;$$

$$\|Ux^* - S^*x^*\| = \Phi(M) - NM.$$

В завершении раздела найдено наилучшее приближение неограниченного оператора заданного вида.

Теорема 1.1. Если $X = C[-a,a]\,(0 < a \leqslant \infty)$,
Y – числовая прямая,
$\omega(\delta)$ – вогнутый модуль непрерывности,
$H[\omega]$ – класс непрерывных функций, для которых $\omega(\delta, x) \leqslant \omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta < 2a)$,

$$Q = C[-a,a] \cap H[\omega],$$

U – линейный (неограниченный) функционал следующего вида

$$Ux = \int_0^a \{x(t) - x(-t)\} f(t)\, dt,$$

где $f(t) \geq 0$ $(0 \leq t < a)$ и

$$\forall h \in (0, a) \int_0^h \omega(2t) f(t) dt < \infty, \ \int_h^a f(t) dt < \infty,$$

то выполняется равенство

$$E_N(U, Q) = \int_0^h \omega(2t) f(t) dt, \tag{1.8}$$

где

$$N = 2 \int_h^a f(t) dt \quad (0 < h < a). \tag{1.9}$$

Во втором разделе найдено наилучшее приближение оператора дифференцирования k - ого порядка на числовой оси линейными ограниченными операторами в общем случае и приведены примеры операторов дифференцирования в случае различных классов Q. Задача ставится следующим образом.

Пусть $I = (-\infty, \infty)$; X – пространство функций; $Q_n(X)$ – класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых до $(n-1)$ – ого порядка включительно, таких что $\|f^{(n)}\|_X \leqslant 1$.

С. Б. Стечкиным была поставлена задача о нахождении величины наилучшего приближения

$$E_{n,k}(N) = \inf_{\|S\|_X^X \leqslant N} \sup_{f \in Q_n(X)} \|f^{(k)}(x) - S(x;\, f)\|_X \quad (0 < k < n), \tag{2.1}$$

где $S(x;\, f)$ – однородный аддитивный оператор, определенный на объединении $X \cup Q_n(X)$ и ограниченный, как оператор действующий из X в X. Также требуется найти экстремальный оператор $S_{n,k}(x;\, f;\, N)$, на котором достигается нижняя грань. Основным результатом являются следующие теоремы.

Теорема 2.2. В случае, если $X = C(-\infty, \infty)$,$\omega(\delta)$ – произвольный модуль непрерывности, где $(0 \leq \delta < \infty)$, и $H'[\omega]$ – класс функций, для которых

$\omega(\delta, f') \leqslant \omega(\delta)$, $(0 \leqslant \delta < \infty)$. Тогда

$$E_N(D, H'[\omega])_{C(-\infty,\infty)} = \inf_{\|S\|\leqslant N} \sup_{f\in H'[\omega]} \|f'(x) - S(x; f)\|_X =$$
$$= N \int_0^{1/N} \omega(x)dx \, (N > 0).$$

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\int_0^h \{\omega(h) - \omega(u)\}du\right) = \sup_{\substack{f\in H'[\omega]\\ \|f\|\leqslant M}} \|f'\| = \omega(h) \, (h > 0).$$

Если $\omega(\delta) = \delta$, то класс $H'[\omega]$ обращается в класс Q_2 и

$$E_{2,1}(h^{-1})_{C(-\infty,\infty)} = \frac{h}{2}.$$

Для случая $n = 3$, $I = (-\infty, \infty)$ приведены примеры ограниченных операторов, наилучшим образом приближающих f' и f'':

$$S_{3,1}(x; f) = \frac{1}{2h}\{f(x + h) - f(x - h)\},$$
$$S_{3,2}(x; f) = \frac{1}{h^2}\{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)\} \tag{2.5}$$

Для них найдена величина наилучшего приближения

$$E_{3,1}(h^{-1})_{C(-\infty,\infty)} = \frac{h^2}{6},$$
$$E_{3,2}(h^{-1})_{C(-\infty,\infty)} = \frac{2h^{1/2}}{3}.$$

Доказана следующая теорема

Теорема 2.4. Пусть $N_{m,k} = \dfrac{m-k}{m} K_{m-k}K_m^{-1}$. Если для $n \leqslant m-1, 1 \leqslant k < n$ и $n = m$, $k = 1$ выполняется равенство

$$E_{n,k}(N_{n,k}) = \frac{k}{n}K_{n-k}, \tag{2.6}$$

то это равенство выполняется и в случае $n = m$, $k > 1$ и

$$S_{m,k}(x; f(t); N_{m,k}) = S_{m-k+l,l}(x; S_{m,k-l}(t; f; N_{m,k-l}); N_{m-k+l,l}),$$

где $0 < l < k < m$.

Для случаев $n = 4, n = 5$ построены операторы наилучшего приближения на основе следующих теорем.

Теорема 2.5. Если $X = C$, $n = 4, 5$, то выполняется равенство (2.6) и

$$S_{4,1}(x; f; N_{4,1}) =$$

$$= -\frac{24\alpha}{\pi(1+\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \{f[x + (2i+1)\pi/2] - f[x - (2i+1)\pi/2]\},$$

$$S_{5,1}(x; f; N_{5,1}) =$$

$$= -\frac{6\beta}{\pi(1+\beta)} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \{f[x + (2i+1)\pi/2] - f[x - (2i+1)\pi/2]\},$$

где $|\alpha| < 1, \alpha^2 + 22\alpha + 1 = 0$; $|\beta| < 1, \beta^2 + 10\beta + 1 = 0$.

Теорема 2.6. Операторы $S_{n,1}(x; f; N_{n,1})(n = 2, 3, 4, 5)$ являются экстремальными в задаче о нахождении величины наилучшего приближения для $X = L$, и равенство (2.6) справедливо.

В конце данного раздела приведены примеры некоторых наилучших приближающих операторов. Если $n = 4$, то операторы $S_k(f)$ близкие к экстремальным имеют вид

$$S_1(f) = \frac{1}{1056h}\{f(x+5h) - 27f(x+3h) + 604f(x+h) -$$
$$-604f(x-h) + 27f(x-3h) - f(x-5h)\},$$

$$S_2(f) = -\frac{1}{23h^2}\{f(x+2h) - 27f(x+h) + 52f(x) -$$
$$-27f(x-h) + f(x-2h)\},$$

$$S_3(f) = \frac{1}{176h^3}\{f(x-5h) - 27f(x-3h) + 76f(x-h) -$$
$$-76f(x-h) + 27f(x+3h) - f(x+5h)\}.$$

В третьем разделе рассматривается случай оператора дифференцирования заданного в пространстве $\mathbb{R}^n$. Сформулирована задача Стечкина для многомерного случая.

Пусть $C = C(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|;$$

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство измеримых, существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_{L_\infty} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|;$$

$D = D(\mathbb{R}^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$;
U – класс функций $u(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\Delta u \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

значение оператора Лапласа, понимаемое по Соболеву: $u \in U, v = \Delta u$, если для любой пары функций $u \in C, v \in L_\infty$ и $\forall \varphi \in D$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi dx.$$

Обозначим

$$\omega(\alpha,\beta) = \sup\{\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_C : u \in U, \|u\|_C \leqslant \alpha, \|\Delta u\|_{L_\infty} \leqslant \beta, \alpha > 0, \beta > 0, i = \overline{1,n}\}$$

и величину наилучшего приближения оператора дифференцирования на множестве $Q = \{u : u \in U; \|\Delta u\|_{L_\infty} \leqslant 1\}$ линейными и ограниченными операторами S, как действующими из $C(\mathbb{R}^n)$ в $C(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|S\| \leqslant N, N > 0$

$$E(N) = \inf_{\|S\|\leqslant N} \sup_{u\in Q} \|\frac{\partial u}{\partial x_i} - Su\|_C, i = \overline{1,n}.$$

Требуется найти $E(N)$ и построить оператор S.

Для получения величины наилучшего приближения оператора дифференцирования и наилучшего приближающего опертора рассмотрено решение экстремальных задач типа Ландау для функций многих переменных в равномерной метрике, получена оценка производных функции u. Оценка проведена при помощи интегрального представления для функции u и ее производных с использованием некоторых свойств производной функции Грина для слоя. В частности, построена функция Грина для слоя Π_h, где

$$\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : -h < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty, i = \overline{2,n}, h > 0\},$$

и она имеет вид:

$$G(\xi,x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\ln\dfrac{1}{r_k}-\ln\dfrac{1}{\rho_k}\right\}, & n=2\\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{r_k^{n-2}}-\dfrac{1}{\rho_k^{n-2}}\right\}, & n>2,\end{cases}\tag{3.2}$$

где

$$r_k=\sqrt{(\xi_1-x_1-4kh)^2+\sum_{i=2}^{n}(\xi_i-x_i)^2},\tag{3.3}$$

$$\rho_k=\sqrt{(\xi_1+x_1-4kh-2h)^2+\sum_{i=2}^{n}(\xi_i-x_i)^2}.\tag{3.4}$$

Интегральное представление для функции $u(x)\in U$ приведено в следующей лемме.

Лемма 3.6. Для $u(x)\in U$ справедлива формула

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)2\pi^{n/2}}\int\limits_{\partial\Pi_h}u(\xi)\frac{\partial^2G(\xi,x)}{\partial x_1\partial n_\xi}d\xi-\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)2\pi^{n/2}}\int\limits_{\Pi_h}\Delta u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_1}d\xi,\tag{3.10}$$

где $G(\xi,x)$ – функция Грина для слоя Π_h; $\frac{\partial G}{\partial n_\xi}$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial\Pi_h$, взятая в точке $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$.

В случае $n=2$ интегральное представление принимает вид

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\Pi_h}u(\xi_1,\xi_2)\frac{\partial^2G(\xi,x)}{\partial x_1\partial n_\xi}d\xi_2-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Pi_h}\Delta u(\xi_1,\xi_2)\frac{\partial G}{\partial x_1}d\xi_1d\xi_2,\tag{3.11}$$

где $G(\xi_1,\xi_2,x_1,x_2)$ – функция Грина для полосыΠ_h; $\dfrac{\partial G}{\partial n_\xi}$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial\Pi_h$, взятая в точке ξ.

Проведено доказательство неравенств типа Ландау.

Теорема 3.8. Для функций класса U справедливы неравенства

$$\|u'_{x_i}\|_C\leqslant\sqrt{2\|u\|_C\|u\|_{L_\infty}},i=\overline{1,n}.\tag{3.16}$$

Эти неравенства являются точными.

Доказательство проведено методом интегральных представлений с использованием свойств производной функции Грина на границе слоя Π_h.

Из доказательства неравенств типа Ландау получена величина наилучшего приближения оператора дифференцирования в равномерной метрике и построен оператор, наилучшим образом приближающий оператор дифференцирования.

Теорема 3.9. Пусть $C = C(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|;$$

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство измеримых, существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|;$$

$D = D(\mathbb{R}^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$;
U – класс функций $u(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\Delta u \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

значение оператора Лапласа, понимаемое по Соболеву: $u \in U, v = \Delta u$, если для любой пары функций $u \in C$, $v \in L_\infty$ и $\forall \varphi \in D$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi dx.$$

Величина наилучшего приближения оператора дифференцирования на множестве $Q = \{u:\ u \in U;\ \|\Delta u\|_{L_\infty} \leqslant 1\}$ линейными и ограниченными операторами S, как действующими из $C(\mathbb{R}^n)$ в $C(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|S\| \leqslant 1/h, h > 0$ равна

$$E(1/h) = h/2,$$

а оператор наилучшего приближения имеет вид

$$(S_h u)(z) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi + z) \frac{\partial^2 G(\xi, 0)}{\partial x_1 \partial n_\xi} d\xi.$$

В последней части работы расширены результаты предыдущего раздела на случай пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Если L_1 – пространство измеримых суммируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_{L_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx.$$

и $U_1 = u \in L_1 : \Delta u \in L_1$, где оператор Лапласа понимается по Соболеву, тогда имеет место следующее утверждение:

Теорема 4.1. Для функций класса U_1 выполняются неравенства

$$\|u'_{x_i}\|_{L_1} \ \leqslant \ \sqrt{2\|u\|_{L_1} \cdot \|u\|_{L_1}}, i = \overline{1, n}.$$

Эти неравенства являются точными.

Теорема 4.2. Величина наилучшего приближения

$$E(1/h)_{L_1} = h/2,\ h > 0$$

а оператор наилучшего приближения

$$(S_h u)(z) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi + z) \frac{\partial^2 G(\xi, 0)}{\partial x_1 \partial n_\xi} d\xi.$$

Заключение

В данной работе исследовано поведение наилучших приближений $E(N)$ как функций от N; построены операторы, наилучшим образом приближающие операторы дифференцирования 1 и 2 порядка в равномерной метрике и в метрике пространства L_1; получена оценка величины наилучшего приближения неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства; найдено наилучшее приближение оператора дифференцирования в равномерной метрике на числовой оси и в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейными ограниченными операторами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Арестов, В. В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования/ В. В. Арестов// Матем. заметки. 1967. Т. 1, №2. С. 149–154.

2 Стечкин, С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов/ С. Б. Стечкин// Матем. заметки. 1967. Т. 1, №2. С. 137–148.

3 Стечкин, С. Б. Неравенства между нормами производных произвольной функции/ С. Б. Стечкин// Acta Scient. Math. Szeged. 1965. Т. 26. С. 225–230.

4 Субботин, Ю. Н. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2/ Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков// Матем. заметки. 1968. Т. 3, №2. С. 157–164.

5 Тайков, Л. В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2/ Л. В. Тайков// Матем. заметки. 1977. Т. 22, №4. С. 535–542.

6 Габушин, В. Н. О наилучшем приближении операторов дифференцирования на полупрямой/ В. Н. Габушин// Матем. заметки. 1969. Т. 6, №5. С. 573–582.

7 Бердышев, В. И. О наилучшем приближении в $L[0,\infty)$ оператора дифференцирования/ В. И. Бердышев// Матем. заметки. 1971. Т. 9, №5. С. 477–481.

8 Тайков, Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования/ Л. В. Тайков// Матем. заметки. 1968. Т. 4, №2. С. 233–238.

9 Габушин, В. Н. Точные константы в неравенствах между нормами производных функции/ В. Н. Габушин// Матем. заметки. 1968. Т. 4, №2. С. 221–232.

10 Габушин, В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p/ В. Н. Габушин// Матем. заметки. 1967. Т. 1, №3. С. 291–298.

11 Арестов, В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи/ В. В. Арестов// УМН. 1996. Т. 51, №6. С. 89–124.

12 Арестов, В. В. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными/ В. В. Арестов, В. Н. Габушин// Изв. вузов. Матем. 1995. №11. С. 42–68.

13 Арестов, В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора/ В. В. Арестов// Матем. заметки. 1977. Т. 22, №2. С. 231–244.

14 Колмогоров, А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале/ А. Н. Колмогоров//Уч. зап. МГУ. Математика. 1939. В. 30, кн. 3. С. 3–16.

15 Водопьянов, С. К. Интегрирование по Лебегу: Учеб. пособие / С. К. Водопьянов. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2006. Гл. 11. С. 54–60.

16 Зорич, В. А. Математический анализ. В 2 ч. Ч. 2/ В. А. Зорич. 4-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2002. Гл. 11. С. 113–165

17 Sard, A. Linear approximation/ A. Sard// Math. Surveys. Providence, RI Amer. Math. Society, 1963. Nr9. 544 pp.

18 Арестов, В. В. О точных неравенствах между нормами функций и их производных/ В. В. Арестов// Acta Scient. Math. 1972. Vol. 33, No. 3–4. P. 243–267.

19 Тимофеев, В. Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных/ В. Г. Тимофеев// Матем. заметки. 1985. Т. 37, №5. С. 676–689.

20 Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике/ Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1972. 688 с.

21 Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. 5-е изд. М.: Наука, 1972. 736 с.

22 Будак, Б. М. Кратные интегралы и ряды/ Б. М. Будак, С. В. Фомин. М.: Наука, 1967. Гл. 10. С. 402–449.

23 Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах/ И. Стейн, Г. Вейс. М.: Мир, 1974. 332 с.