Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики
и вычислительной математики

Обратная задача для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на произвольном компактном графе

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Васильева Сергея Владимировича

Научный руководитель
Доцент, кандитат физ.-мат. наук ________ М. Ю. Игнатьев
должность, уч.степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой, профессор,
доктор физ.-мат. наук ________ В. А. Юрко
должность, уч.степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов, 2016 год

Введение

Актуальность темы исследования. Спектральные задачи, задачи рассеяния, а также задачи переноса для дифференциальных операторов на графе в последние годы достаточно часто встречаются в математических, естественно-научных и инженерных работах. В таких областях как наноэлектроника, механика и также квантовые вычисления эти задачи используются для построения математических моделей и их дальнейшего изучения. Большая часть этих работ посвящена так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и собственных функций для оператора на графе. Обратные спектральные задачи в силу нелинейности являются более сложными объектами для изучения и на данный момент существует не так много работ, посвященных этой теме. В частности, была изучена обратная спектральная задача восстановления коэффициентов дифференциальных операторов на деревьях (т.е. графов без циклов), а также была решена задача восстановления коэффициентов в операторе Штурма-Лиувилля на произвольном компактном графе. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами также достаточно часто встречаются в различных областях математических или естественно-научных дисциплин. В современных работах были изучены сами операторы, порожденные на конечных промежутках, а также получены результаты для обратных задач. Обратные задачи для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графах практически не рассматривались.На данный момент есть лишь решение такой задачи на графеЦзвезде.

Цель магистерской работы состоит в решении обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на произвольном компактном графе. Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач:

1. Изучить методы решения обратных спектральных задач;
2. Доказать теорему единственности для получаемого решения;

3. Построить алгоритм решения задачи;

Магистерская работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников. В введении дается общая характеристика работы: актуальность, цель, задачи. В первой главе дается формулируется обратная задача для уравнения Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на произвольном графе. Во второй главе вводятся в рассмотрения различные решения уравнения и доказываются вспомогательные утверждения. В третьей главе решается обратная вспомогательная задача на некотором ребре. В четвертой главе формулируется возвратная процедура и строится решение поставленной задачи. В заключении приводятся результаты проделанной работы.

Основное содержание работы

В **первой главе** вводится в рассмотрение уравнение Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на компактном связном графе G, а также ставится обратная задача восстановления потенциала по функциям Вейля. Рассмотрим компактный связный граф G. Обозначим множество вершин графа G как $V(G)$, а множество ребер - $E(G)$. Ребра графа G будем рассматривать как гладкие кривые, которые пересекаются только в вершинах. Длину ребра e обозначим как $|e|$. Каждое ребро e параметризуем параметром $x \in [0, |e|]$. Ориентацию ребра выберем таким образом, чтобы его начало соответствовало точке $x = |e|$, а конец - точке $x = 0$. Также введем в рассмотрение отображение μ, которое в соответствие каждому ребру будет ставить упорядоченную пару вершин $e^{\pm} \in V(G)$: $\mu(e) := [e^-, e^+]$, где вершина e^- соответствует началу ребра, а e^+ - концу.

Множество внутренних вершин обозначим через $V^I(G)$, а множество граничных - $V^B(G)$. Множество ребер, инцидентых вершине v в графе G обозначим как $I(v, G)$. Цепь ребер $\{e_1, ..., e_n\}$ называется циклом, если образует замкнутую кривую. Ребро e называется простым, если не является частью какого-либо цикла. Пусть $E^P(G)$ - множество простых ребер. Введем также множество ребер, принадлежащих одному или нескольким циклам: $E^C(G) = E(G)\backslash E^P(G)$. Для определенности будем считать, что в графе G есть хотя бы одна граничная вершина. Определим некоторую вершину $v_r \in V^B(G)$ как корень. В дальнейшем будем считать, что если $e \in E^P(G)$, то начало ребра будет ближе к корню, чем его конец.

Сведем все циклы в точки, тогда получим некоторый граф G^* с множеством ребер $E(G^*) = E^P(G)$. Минимальное число ребер на G^* между корневым ребром и ребром e, включая e называется порядком ребра e. Число $\omega := \max\limits_{e\in G^*} \omega_e$ называется порядком G^*. обозначим множество $E^{(\nu)},\ \nu = \overline{0,\omega}$, множеством простых ребер порядка ν.

Пусть y - некоторая функция на графе, представимая как $y = [y_e]_{e\in E}$, где $y_e(x)$ относится к ребру e, а $x \in [0, |e|]$. Также рассмотрим вещественнозначную функцию $q = [q_e]_{e\in E(G)}$, где $q_e(x)$ относится к ребру e, а $x \in [0, |e|]$ определена на ребре e и $q_e \in W_2^{-1}[0, |e|]$, т.е. $q_e(x) = \sigma_e'(x)$ (производная рассматривается в смысле обобщенных функций), а $\sigma_e(x) \in L_2[0, |e|]$. Мы назовем функцию $\sigma_e(x)$ потенциалом на ребре e. Обозначим $\sigma = [\sigma_e]_{e\in E(G)}$. Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на ребре $e \in E(G)$ [9-11]:

$$\ell_e y_e = -\big(y_e^{[1]}\big)' - \sigma_e(x) y_e^{[1]} - \sigma_e^2(x) y_e,$$

$$\ell_e y_e = \lambda y_e,\ e \in E(G) \tag{1.1}$$

где $y_e^{[1]} := y_e' - \sigma_e(x) y_e$ - это квазипроизводная.

$$dom(\ell_e) = \{y_e \mid y_e \in W_2^1[0, |e|],\ y_e^{[1]} \in W_1^1[0, |e|],\ \ell_e y_e \in L_2[0, |e|]\}.$$

В каждой вершине $v \in V^I(G)$ введем условия склейки, которые в дальнейшем будем обозначать как $MC(v)$-условия для $e \in I(v, G)$:

$$\begin{gathered} y_e|_v = y_r|_v, \quad e, r \in I(v, G), \\ \sum\nolimits_{e\in I(v,G)} \partial_e y_e|_v = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где введены обозначения

$$y_e|_v := \begin{cases} y_e(0), & v = e^+ \\ y_e(|e|), & v = e^- \end{cases}, \quad \partial_e y_e|_v := \begin{cases} y_e^{[1]}(0), & v = e^+ \\ -y_e^{[1]}(|e|), & v = e^- \end{cases}$$

Также, если некоторое ребро $e \in E^B(G)$, то под $y|_v$, $\partial y|_v$ будем понимать соответственно $y_e|_v$, $\partial_e y_e|_v$, такие, что $e \in I(v, G)$, а $v \in V^B(G)$.

Рассмотрим краевую задачу $L_D(G)$, $D \subset V^B(G)$, для уравнения (1.1) с $MC(v)$-условиями в каждой $v \in V^I$ и граничным условиями

$$\partial y|_v = 0, \quad v \in V^B(G) \backslash D, \quad y|_u = 0, \quad u \in D. \tag{1.3}$$

Пусть ребро $r \in E^C(G)$, а $v = r^-$. Рассмотрим краевую задачу $L_D^v(G)$, $D \subset V^B(G)$, для уравнения (1.1) с $MC(u)$-условиями в каждой $u \in V^I(G) \backslash \{v\}$ и граничными условиями

$$\begin{gathered} \partial y|_u = 0, \quad u \in V^B(G) \backslash D, \qquad y|_u = 0, \quad u \in D, \\ y_e|_v = 0, \; e \in I(v, G) \end{gathered} \tag{1.4}$$

В дальнейшем будем обозначать $L(G) := L_\varnothing(G)$, $L^v(G) := L_\varnothing^v(G)$.

Пусть $\varphi_v = [\varphi_{ev}]_{e \in E(G)}$, $v \in V^B(G)$, будут решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими (1.2) и граничным условиям

$$\partial \varphi_v|_u = \delta_{uv}, \quad u \in V^B(G) \tag{1.5}$$

где δ_{uv}-символ Кронекера.

Обозначим $M_v(\lambda) := \varphi_v|_v$. Функция $M_v(\lambda)$ называется функцией Вейля для уравнения (1.1) относительно вершины $v \in V^B(G)$.

Теперь построим функцию Вейля на ребрах из множества $E^C(G)$. Зафиксируем $e \in E^C(G)$. Пусть $\varphi_e = [\varphi_{er}]_{r \in E(G)}$ будут решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими $MC(v)$–условиям при $v \in V^I(G) \backslash \{e^+\}$, $MC(e^+)$–условиям для всех ребер $r \in I(e^+, G) \backslash \{e\}$ и граничным условиям

$$\partial \varphi_e|_{r^+} = \delta_{er}, \; r \in E^B(G) \cup \{e^+\} \tag{1.6}$$

Обозначим $M_e(\lambda) := \varphi_e|_{e^+}$, $e \in E^C(G)$.

Наряду с потенциалом σ мы рассмотрим потенциал $\widetilde{\sigma}$. В дальнейшем будем считать, что если символ α обозначает объект, зависящий от σ, то тогда $\widetilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, зависящий от $\widetilde{\sigma}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \widetilde{\alpha}$.

Сформулируем обратную задачу:

Обратная задача 1. По данным $M_v(G)$, $v \in E^B(G)$, и $M_e(\lambda)$, $e \in E^C(G)$, построить потенциал q на графе G.

Во **второй главе** получаются оценки для некоторых решений уравнения (1.1), а также доказываются различные вспомогательные утверждения. Пусть $C_e(x,\lambda)$, $S_e(x,\lambda)$ - решения с краевыми условиями

$$C_e(0,\lambda) = S_e^{[1]}(0,\lambda) = 1, \quad C_e^{[1]}(0,\lambda) = S_e(0,\lambda) = 0,$$

а $\psi_e(x,\lambda)$, $\zeta_e(x,\lambda)$ - решения с краевыми условиями

$$\zeta_e(|e|,\lambda) = -\psi_e^{[1]}(|e|,\lambda) = 1, \quad \psi_e(|e|,\lambda) = \zeta_e^{[1]}(|e|,\lambda) = 0. \tag{2.1}$$

Из формулы Остроградского-Лиувилля получим $< C_e(x,\lambda), S_e(x,\lambda) >= 1$, где вронскиан $< y, z >= yz^{[1]} - y^{[1]}z$. Обозначим через $\Delta(\lambda, L(G))$ характеристическую функцию краевой задачи $L(G)$. Как и в классическом случае, можно показать, что функция $M_v(\lambda)$ будет мероморфной:

$$M_v(\lambda) = -\frac{\Delta(\lambda, L_v(G))}{\Delta(\lambda, L(G))},$$

Пусть $\gamma = \gamma(\tau) := (-\infty + i\tau, +\infty + i\tau)$ и $\lambda = \rho^2$. Под функцией $\eta(x,\rho,\sigma)$ будем понимать целую по ρ при всех $x \in [0,l]$ (l могут быть различны для различных $\eta(x,\rho,\sigma)$) и некотором фиксированном потенциале σ функцию, такую что:

1) $\eta(x,\rho,\sigma) = o(exp(x|Im\rho|))$ при $\rho \to \infty$ и при любых фиксированных $x \in [0,l]$ и $\sigma \in L_2(G)$.

2) $\eta(x,\cdot,\sigma) \in L_2(\gamma)$ для любого $x \in [0,l]$ при всех вещественных τ и фиксированном $\sigma \in L_2(G)$.

3) $\eta(\cdot,\cdot,\sigma) \in L_2[0,l]\times\gamma$ и равномерно ограничена на $[0,l]\times\gamma$ при каждом фиксированном вещественном τ и фиксированном $\sigma \in L_2(G)$.

4) $\eta(x,\rho,\sigma)$ непрерывно зависит от σ, а именно при $\sigma_n \to \sigma$ в $L_2(G)$ функция $\eta(x,\rho,\sigma_n)$ сходятся к функции $\eta(x,\rho,\sigma)$ равномерно на $[0,l]\times\gamma$ для всех $\tau > \tau_0$ и

$$\max_{x\in[0,l]} ||\eta(x,\cdot,\sigma_n) - \eta(x,\cdot,\sigma)||_{L_2(\gamma)} \to 0.$$

Введем в рассмотрение множество $A(\tau_0) := \{\rho : Im\rho \geq \tau_0\}$. Под функцией $\kappa(\rho,\sigma)$ будем понимать мероморфную функцию, такую что

1) при фиксированном $\sigma \in L_2(G)$ функция $\kappa(\rho,\sigma) \to 0$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in A(\tau_0)$, где τ_0 может быть различна для различных функций κ.

2) $\kappa(\cdot,\sigma) \in L_2(\gamma)$ для всех вещественных $\tau > \tau_0$ и фиксированном $\sigma \in L_2(G)$.

3) $\kappa(\rho,\sigma)$ непрерывно зависит от σ, а именно при $\sigma_n \to \sigma$ в $L_2(G)$ функция $\kappa(\rho,\sigma_n)$ сходится к функции $\kappa(\rho,\sigma)$ в $L_2(\gamma)$ и равномерно на γ для всех $\tau > \tau_0$.

В дальнейшем обозначим как $\eta(x,\rho)$ и $\kappa(\rho)$ соответственно различные функции $\eta(x,\rho,\sigma)$ и $\kappa(\rho,\sigma)$ с указанными свойствами.

Из [9]–[11] можно получить:

$$C_e(x,\lambda) = cos\rho x + \eta(x,\rho), \quad S_e(x,\lambda) = \frac{sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\eta(x,\rho), \tag{2.2}$$

$$\zeta_e(x,\lambda) = cos\rho(|e|-x) + \eta(|e|-x,\rho), \quad \psi_e(x,\lambda) = \frac{sin\rho(|e|-x)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\eta(|e|-x,\rho) \tag{2.3}$$

Обозначим $[1] := 1+\kappa(\rho)$. Тогда, используя асимптотики (2.2) для $C_e(x,\lambda)$ и $S_e(x,\lambda)$, получаем

$$C_e(|e|,\lambda) = \cos\rho|e|[1], \quad C_e^{[1]}(|e|,\lambda) = -\rho\sin\rho|e|[1], \tag{2.4}$$

$$S_e(|e|,\lambda) = \frac{\sin\rho|e|}{\rho}[1], \quad S_e^{[1]}(|e|,\lambda) = \cos\rho|e|[1]. \tag{2.5}$$

Ясно, что решения $\zeta_e(x,\lambda)$ и $\psi_e(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда решение уравнения (1.1) можно выразить как линейную комбинацию решений $C_e(x,\lambda)$ и $S_e(x,\lambda)$ или $\zeta_e(x,\lambda)$ и $\psi_e(x,\lambda)$. Обозначим

$$\xi_e(x,\lambda) := C_e(x,\lambda) - i\rho S_e(x,\lambda); \quad E_e(x,\lambda) := \zeta_e(x,\lambda) - i\rho\psi_e(x,\lambda),$$

Используя (2.2) и (2.3), получим

$$\xi_e(x,\lambda) = e^{-i\rho x} + \eta(x,\rho); \quad E_e(x,\lambda) = e^{i\rho(x-|e|)} + \eta(|e|-x,\rho) \tag{2.6}$$

Из (2.6) получим следующие выражения

$$\xi_e(|e|,\lambda) = e^{-i\rho|e|}[1], \quad E_e(0,\lambda) = e^{-i\rho|e|}[1], \tag{2.7}$$

$$\xi_e^{[1]}(|e|,\lambda) = -i\rho e^{-i\rho|e|}[1], \quad E_e^{[1]}(0,\lambda) = i\rho e^{-i\rho|e|}[1]. \tag{2.8}$$

Решения $\xi_e(x,\lambda)$ и $E_e(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда рассмотрим

$$\varphi_{er}(x,\lambda) = A_{er}(\lambda)\xi_r(x,\lambda) + B_{er}(\lambda)E_r(x,\lambda). \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (1.2) и в (1.6), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $A_{er}(\lambda)$, $B_{er}(\lambda)$. Определитель этой СЛАУ обозначим как $\Delta_B(\lambda,G)$. Тогда справедливы следующие леммы

Лемма 1. *Пусть* $\Theta := \{\sum\limits_{e\in E}\theta_e|e|,\ \theta_e \in \{0,1,2\}\}$. *Тогда справедливо*

$$\Delta_B(\lambda,G) = (i\rho)^n \sum_{l\in\Theta} A_l(G)e^{-i\rho l}[1], \quad A_{|G|} \neq 0, \tag{2.20}$$

где $n := |V^I| + |V^B|$, *а* $|G| := 2\sum\limits_{e\in E(G)}|e|$.

Лемма 2. *Для достаточно больших* $|\rho|$, *таких что* $\rho \in A_\varepsilon$, *справедлива оценка*

$$C_1|\rho|^n e^{2|G|Im\rho} < |\Delta_B(\lambda,G)| < C_2|\rho|^n e^{2|G|Im\rho}. \tag{2.28}$$

Из справедливости полученных лемм вытекает

Лемма 3. *При фиксированных $x \in [0, |e|]$ для $\rho \in A_\varepsilon$, $\rho \to \infty$, справедливы следующие асимптотики*

$$\varphi_{er}(x,\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-xIm\rho}\Big), \quad \varphi_{er}^{[1]}(x,\lambda) = O\Big(e^{-xIm\rho}\Big), \tag{2.29}$$

$$\hat{\varphi}_{er}(x,\lambda) = \frac{1}{\rho}e^{i\rho x}\hat{\kappa}(\rho). \tag{2.20}$$

В **третьей главе** доказывается единственность, а также на некотором фиксированном ребре $k \in E^B(G)$ формулируется и решается вспомогательная обратная задача:

Вспомогательная обратная задача $IP(k,G)$: по данным $M_{k^+}(\lambda)$, построим потенциал q на k.

Воспользовавшись леммой 3 и свойствами функции $\kappa(\rho)$, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Зафиксируем $k \in E^B(G)$. Пусть $k \in I(v,G)$. Если $M_{k^+}(\lambda) \equiv \widetilde{M}_{k^+}(\lambda)$, тогда $\sigma_k(x) \equiv \widetilde{\sigma}_k(x)$ почти всюду на $[0,|k|]$.*

В ρ- плоскости рассмотрим контур $\gamma = \gamma(\tau) := (-\infty + i\tau, +\infty + i\tau)$, где $\tau > 0$ такое, что $\inf\{\Lambda_k \cup \widetilde{\Lambda}_k\} > -\tau^2$. Пусть Γ будет контуром в λ-плоскости, который есть образ γ при отображении $\lambda = \rho^2$. Обозначим D^+ образ полуплоскости $\{Im\rho > \tau\}$, и $D^- := C \backslash D^+$. Пусть

$$C_N := \{|\lambda| = (N+1/4)^2\}, \quad C_N^- := C_N \cap D^-$$

контура с обходом по часовой стрелке. Обозначим $\Gamma_N = \Gamma \cap intC_N$, $\Gamma_N^- = \Gamma_N \cup C_N^-$.

Определим функцию

$$D_k(x,\lambda,\mu) := \frac{< C_k(x,\lambda), C_k(x,\mu) >}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x C_k(t,\lambda)C_k(t,\mu)dt,$$

$$\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu) := \frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda), \widetilde{C}_k(x,\mu) >}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x \widetilde{C}_k(t,\lambda)\widetilde{C}_k(t,\mu)dt,$$

Тогда справедливы следующие леммы

Лемма 4. *Для всех $x \in [0, |k|]$, $\lambda \in D^+$ справедливо*

$$C_k(x, \lambda) = \widetilde{C}_k(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \to \infty} \int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu) \hat{M}_k(\mu) C_k(x, \mu) d\mu. \qquad (3.2)$$

Определим

$$\widetilde{r}_k(x, \rho, \theta) := \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\theta \hat{M}_k(\mu); \quad r_k(x, \rho, \theta) := D_k(x, \lambda, \mu)\theta \hat{M}_k(\mu);$$

Выберем контур $\gamma(\tau)$ таким, что $\theta \hat{M}_e(\mu) \in L_2(\gamma)$.

Лемма 5. *Для любого $\lambda \in \overline{D^+}$ и $x \in [0, |k|]$,*

$$\int_\gamma |D_k(x, \lambda, \theta^2)|^2 |d\theta| < A(x, \rho), \qquad (3.3)$$

где $A(x, \rho)$ равномерно ограниченно на компактном множестве.

Лемма 6. *Выполняются следующие оценки*

$$\int_\gamma \int_\gamma |r_k(x, \rho, \theta)|^2 |d\theta||d\rho| < \infty, \quad \int_\gamma \int_\gamma |\widetilde{r}_k(x, \rho, \theta)|^2 |d\theta||d\rho| < \infty. \qquad (3.4)$$

Перенесем уравнение (3.2) на Гильбертово пространство $L_2(\gamma)$. Из [19] мы получим соотношение

$$\Psi_k(x, \rho) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \widetilde{r}_k(x, \rho, \theta) \Psi_k(x, \theta) d\theta + \widetilde{F}_k(x, \rho), \qquad (3.5)$$

где при $\lambda \to \Gamma$

$$\Psi_k(x, \rho) := C_k(x, \lambda) - \widetilde{C}_k(x, \lambda),$$

$$\widetilde{F}_k(x, \rho) := \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \to \infty} \int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu) \hat{M}_k(\mu) \widetilde{S}_k(x, \mu) d\mu, \ \lambda = \rho^2 \qquad (3.6)$$

Из (2.2) следует, что $\Psi_k(x, \cdot) \in L_2(\gamma)$. Для каждого фиксированного $x \in [0, |k|]$ соотношение (3.5) может быть рассмотрено как линейное интегральное уравнение в $L_2(\gamma)$ относительно $\Psi_k(x, \rho)$. Уравнение (3.5) называется основным уравнением для задачи $IP(k)$. Удобно перезаписать основное уравнение в операторной форме. Для каждой фиксированной $x \in [0, |k|]$ мы определим линейные операторы $\widetilde{H}_k(x)$ и $H_k(x)$ в $L_2(\gamma)$ следующим образом

$$\widetilde{H}_k(x)f(\rho) := \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \widetilde{r}_k(x,\rho,\theta)f(\theta)d\theta, \quad H_k(x)f(\rho) := \frac{1}{\pi i}\int_\gamma r_k(x,\rho,\theta)f(\theta)d\theta$$

Тогда основное уравнение запишется в виде

$$\Psi_k(x) = \widetilde{H}_k(x)\Psi_k(x) + \widetilde{F}_k(x). \tag{3.7}$$

Из (3.4) следует, что $\widetilde{H}_k(x)$ является оператором Гильберта-Шмидта в $L_2(\gamma)$.

Используя лемму 4, можно получить

Теорема 2. *Для каждого фиксированного $x \in [0, |k|]$ уравнение (3.7) единственным образом разрешимо в $L_2(\gamma)$.*

Найдем решение задачи $IP(e)$. Используя (3.2), получим

Теорема 3. *Решение $\sigma_e(x)$ задачи $IP(e)$ может быть найдено по формуле*

$$\sigma_k(x) = -\tfrac{1}{\pi i}\int_\Gamma \widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu + \tfrac{1}{\pi i} l.i.m._{N\to\infty}\int_{\gamma_N} \rho\cos 2\rho x \hat{M}_k(\rho^2)d\rho \tag{3.8}$$

где $\gamma_N = \gamma \cap \{\rho : |\rho|^2 = (N+1/4)^2\}$.

Таким образом, решение вспомогательной задачи может быть построено по следующему алгоритму:

Алгоритм 1. Дана функция $M_k(\lambda)$.

1) Возьмем $\widetilde{\sigma} = 0$ и подсчитаем $\widetilde{C}_k(x,\lambda)$, $\widetilde{M_k}(\lambda)$, $\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)$ и $\widetilde{r}_k(x,\rho,\theta)$.

2) Построим $\widetilde{F}_k(x,\rho)$ используя (3.6).

3) Найдем $\Psi_k(x,\rho)$, решив основное уравнение (3.7) для каждого фиксированного $x \in [0, |k|]$.

4) Построим $\sigma_k(x)$, используя (3.8), где $\hat{C}_k(x,\lambda) = \Psi_k(x,\rho)$.

В **четвертой главе** формулируется возвратная процедура и решается обратная задача 1. Для получения возвратной процедуры представим решение уравнения (1.1) в виде

$$y_e(x,\lambda) = M_e^0(\lambda)S_e(x,\lambda) + M_e^1(\lambda)C_e(x,\lambda). \tag{4.1}$$

Построим графы $\hat{G}$ и Q. Зафиксируем ребро $r \in E^P(G) \cap E^I(G)$. Пусть $v = r^-$, $v \in V(G)$. Вершина v делит граф G на две части: $G = Q \cup \hat{G}$, где $V(Q) \cap V(\hat{G}) = v$ и $E(\hat{G}) \cap I(v, G) = r$.

Подставляя решение (4.1) в различные краевые условия, мы получим различные характеристические функции, представимые, как определители. Определитель $\Delta(\lambda, L(G))$ разложим по теореме Лапласа по тем столбцам, которые соответствуют $M_e^0(\lambda)$, $M_e^1(\lambda)$, $e \in E(\hat{G})$. Возможны два случая.

1. Пусть $v \in V^B(Q)$. Тогда ясно, что при $u \in V^B(G) \cap V^B(Q)$

$$\Delta(\lambda, L(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_v(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L(Q)),$$
$$\Delta(\lambda, L_u(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_{uv}(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_u(Q)),$$

Тогда из определения функции Вейля получим

$$M_v(\lambda, \hat{G}) = \frac{M_u(\lambda, G)\Delta(\lambda, L_v(Q)) + \Delta(\lambda, L_{uv}(Q))}{\Delta(\lambda, L_u(Q)) + \Delta(\lambda, Q)M_u(\lambda, G)}. \tag{4.2}$$

2. Для $v \in V^I(Q)$ аналогично получаем при $u \in V^B(G) \cap V^B(Q)$

$$\Delta(\lambda, L(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L^v(Q)),$$
$$\Delta(\lambda, L_u(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_u(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_u^v(Q)),$$

Тогда получаем

$$M_v(\lambda, \hat{G}) = \frac{M_u(\lambda, G)\Delta(\lambda, L(Q)) + \Delta(\lambda, L_u(Q))}{\Delta(\lambda, L_u^v(Q)) + \Delta(\lambda, L^v(Q))M_u(\lambda, G)}. \tag{4.3}$$

Пусть дано $M_v(\lambda, G)$, $v = e^{\pm}$, $e \in E^C(G)$. Рассмотрим задачу $IP(e, G)$. Сдвинув некоторую вершину u , соответствующую концу ребра e, к вершине $u' \notin G$ без изменений других вершин и изменения длины $|e|$, мы получим G_e с ребром e' вместо e. Ребро e' - граничное в G_e, а u' - граничная вершина. Учитывая, что процедура восстановления потенциала одинакова для всех ребер, то ясно, что $IP(e, G)$ эквивалентно $IP(r, G)$, где $e \in E^C(G)$, $r \in E^B(G)$.

Возвратная процедура. Зафиксируем $e \in E^P(G) \backslash E^B(G)$. Пусть $e \in E^{(\nu)}$ и вершина $v \in V(G)$ - начало ребра e. Вершина v делит граф G на две части $G = Q \cup \hat{G}$, где $V(Q) \cap V(\hat{G}) = v$ и $E(\hat{G}) \cap I(v, G) = e$. Тогда выполняются (4.2) или (4.3). Предполагаем потенциал q известным на Q. Фиксируем $u \in V^B(G) \cap V(Q)$. Пусть $M_u(\lambda, G)$ даны.

1. Функции Вейля $M_v(\lambda, \hat{G})$ находим из (4.2) или (4.3).

2. Решая обратную задачу $IP(r, \hat{G})$, мы построим потенциал q на r.

Пусть даны спектры $M_v(\lambda),\ M_e(\lambda)$, $v \in V^B(G)$, $e \in E^C(G)$. Тогда решение обратной задачи:

Алгоритм 2.

1. Для каждого фиксированного

a)$k \in E^B(G)$ решаем $IP(k, G)$ по алгоритму 1 и находим σ_k

b)$e \in E^C(G)$ решаем $IP(e, G)$ по алгоритму 1 и находим σ_e

2. Для $\nu = \omega - 1, ..., 0$ мы используем возвратную процедуру, а, следовательно, находим $M_{k^+}(\lambda)$. После чего находим σ_k, используя процедуру восстановления потенциала из функции Вейля. Повторяя этот шаг для всех $k \in E^{(\nu)}$ и всех $\nu = \omega - 1, ..., 0$, получаем σ на всем графе G.

Заключение

В магистерской работе рассмотрена обратная задача восстановления потенциала по данным функциям Вейля для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом, заданном на произвольном компактном графе. Была доказана теорема единственности, получена возвратная процедура и был построен алгоритм решения поставленной задачи.