Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

термоустойчивость изотропной ребристой пластинки на базе модели типа Рейсснера

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета
Курбатова Владимира Николаевича

Научный руководитель
д.т.н., профессор ________________ Г.Н. Белосточный
дата, подпись

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ________________ Л.Ю. Коссович
дата, подпись

Саратов 2016

введение

Общая характеристика работы. Выпускная квалификационная работа выполнена на тему «Термоустойчивость ортотропной ребристой пластинки на базе модели типа Рейсснера».

Объект исследования: тонкая пластинка, изготовленная из изотропного материала и подкрепленная ребрами жесткости.

Предмет исследования: критическая температура ребристой пластинки, при которой последняя скачкообразно меняет форму равновесия.

Задача исследования: вывод уравнения для определения критической температуры для прямоугольной изотропной пластинки, подкрепленной ребрами жесткости, на базе модели типа Рейсснера, а также исследование влияния ребер жесткости на термоустойчивость системы.

Актуальность. Ребристые пластинки являются элементами многих конструкций современной техники(в авиа и судостроении, электронике). В некоторых случаях условия эксплуатации предполагают температурное воздействие со стороны рабочей среды. Известно, что поведение тонкостенных конструкций в температурных полях непредсказуемо. По этой причине анализ термоупругого поведения является чрезвычайно важным для практики.

Цель. Получить выражение для силовой функции термоупругой системы "пластинка–ребра"на базе модели типа Рейсснера. Методом Ритца получить уравнения для значений критических температур, при которых происходит статическая потеря устойчивости ребристой пластинки.

Провести количественный анализ влияния геометрических параметров на величину критической температуры.

Структура и объем работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников, включающего 22 наименования, и приложения. Работа изложена на 40 листах машинописного текста, содержит 3 рисунка и 6 таблиц.

основное содержание работы

Во введении проводится исторический обзор развития теории пластин, проводится обзор литературы по термоустойчивости пластин и кратко излагается постановка и решение задачи термоустойчивости ребристой пластинки на базе модели типа Рейсснера.

В первой главе проводится анализ модели Рейсснера: определяются силовые характеристики для пластинки под действием постоянного по толщине температурного поля.

Предполагается, что напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= f(z)\varphi_1(x_1, x_2) \\ \sigma_{23} &= f(z)\varphi_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1}$$

где φ_1, φ_2 неизвестные функции x_1, x_2; $f(z)$–известная функция, характеризующая распределение напряжений по толщине.

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{2}$$

Отсюда были видены деформации:

$$\begin{aligned} e_{13} &= \frac{f}{G}\varphi \\ e_{23} &= \frac{f}{G}\psi \end{aligned} \tag{3}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} u_{1,3} &= -w_{,1} + \frac{f}{G}\varphi \\ u_{2,3} &= -w_{,2} + \frac{f}{G}\psi \end{aligned} \tag{4}$$

Интегрируя, получим закон изменения поля перемещений по толщине пластины в рамках модели Рейсснера:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1, x_2) - w_{,1} z + \frac{\varphi_1}{G} \int f dz \\ u_2 &= v(x_1, x_2) - w_{,2} z + \frac{\varphi_2}{G} \int f dz \end{aligned} \tag{5}$$

Далее были найдены изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left(\gamma_{1,1} + \nu\gamma 2, 2\right) \\ M_{22} &= -\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left(\nu\gamma_{1,1} + \gamma 2, 2\right) \\ M_{12} &= -\frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left[2w_{,12} - \left(\frac{\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}}{10G}\right) h^2\right] \end{aligned} \tag{6}$$

где:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= w_{,1} - \frac{h^2}{10G}\varphi_1 \\ \gamma_2 &= w_{,2} - \frac{h^2}{10G}\varphi_2 \end{aligned} \tag{7}$$

– так называемые обобщенные углы поворота.

Во второй главе выводится выражение для силовой функции термоупругой системы "пластинка–ребра"на базе континуально–дискретной модели в обощенных углах поворота и функции прогиба.

Используем уточненную теорию изгиба изотропных пластин, учитывающую поперечные сдвиги. Тогда силовая фукция рассматриваемой термоупругой системы пластинка-ребра, на базе дискретно-континуальной модели запишется ввиде:

$$
\begin{gathered}
U=\frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left\{D\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\right)^2+2D\nu\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+D\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}\right)^2+\right.\\
+D_k\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\right)^2+\frac{h^2}{120}G\left(\varphi^2+\psi^2\right)+\sum_{i=1}^n\delta(x-x_i)\times\\
\times\left[E_i^pJ_i^p\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}\right)^2+C_i^p\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}\right)^2+\frac{a_i^ph_i^ph}{120}G\psi^2\right]-T_1^0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\\
\left.-T_2^0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-2S^0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dxdy
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Где:

$$
\gamma_1=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{h^2}{10}\varphi;\qquad \gamma_2=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{h^2}{10}\psi \tag{9}
$$

$\delta(x-x_i)$–сдвинутая дельта-функция Дирака;
C_i^p–жесткости кручения ребер;
a_i^p и h_i^p – ширина и высота ребра;
E_i^p и J_i^p – жесткости изгиба ребер;
G – модуль сдвига.
$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\qquad D_k=\frac{h^3}{12}G$.

В третьей главе ставится и решается задача статической термоустойчивости термоупругой системы "пластинка–ребра".

Рассматривается задача о минимуме двойного интегралла силовой функции при граничных условиях:

$$
\begin{array}{lllll}
T_1=S=0, & w=0, & M_1=0, & \psi=0, & x=0,x=a\\
v=S=0, & w=0, & M_2=0, & \varphi=0, & y=0,y=b
\end{array}
\tag{10}
$$

или:

$$
\begin{array}{lllll}
u=S=0, & w=0, & M_1=0, & \psi=0, & x=0,x=a\\
v=S=0, & w=0, & M_2=0, & \varphi=0, & y=0,y=a
\end{array}
\tag{11}
$$

Здесь:
M_1,M_2 – изгибающие моменты;

T_1^0, T_2^0, S^0 – усилия, возникающие в пластинке, когда она имеет плоскую форму равновесия.

Приводится уравнение для определения критических температур полученное на основании метода Ритца. После подстановки в функций w, φ, ψ в виде семейства линейных комбинаций следующих функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{w} = a_{km} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\ \tilde{\varphi} = b_{km} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\ \tilde{\psi} = c_{km} \sin \frac{k\pi a}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \end{array} \right. \tag{12}$$

и нахождения минимума двойного интеграла:

$$
\begin{aligned}
U=\frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b\Bigg\{D\Bigg(\bigg(&-a_{km}\frac{km\pi^2}{ab}+b_{km}\ \frac{h^2}{10}\frac{k\pi}{a}\bigg)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\Bigg)^2+\\
&+2D\nu\left(-a_{km}\frac{km\pi^2}{ab}+b_{km}\frac{h^2}{10}\frac{k\pi}{a}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\times\\
&\times\left(a_{km}\frac{km\pi^2}{ab}-b_{km}\frac{h^2}{10}\frac{m\pi}{b}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}+\\
&+D\left(\left(-a_{km}\frac{m^2\pi^2}{b^2}+c_{km}\frac{h^2}{10}\frac{m\pi}{b}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\right)^2+\\
&+D_k\left(\left(a_{km}\frac{km\pi^2}{ab}-b_{km}\frac{h^2}{10}\frac{m\pi}{b}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}+\right.\\
&\left.+\left(a_{km}\frac{km\pi^2}{ab}-c_{km}\frac{h^2}{10}\frac{k\pi}{a}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\right)^2+\\
&+\frac{h^2}{120}G\left(\left(b_{km}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\right)^2+\right.\\
&\left.+\left(c_{km}\sin\frac{k\pi a}{a}\cos\ \frac{m\pi y}{b}\right)^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\times\\
&\times\Bigg[E_i^pJ_i^p\left(\left(-a_{km}\frac{m^2\pi^2}{b^2}+c_{km}\frac{h^2}{10}\frac{m\pi}{b}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\right)^2+\\
C_i^p&\left(\left(a_{km}\frac{km\pi^2}{ab}-b_{km}\frac{h^2}{10}\frac{m\pi}{b}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\right)^2+\\
&+\frac{a_i^ph_i^ph}{120}G_z\psi^2-T_1^0\left(a_{km}\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\right)^2-\\
&-T_2^0\left(a_{km}\frac{m\pi}{y}\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\right)^2-\\
&-2S^0\left(a_{km}\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}\ \sin\frac{m\pi y}{b}\times a_{km}\frac{m\pi}{b}\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\right)\Bigg\}dxdy
\end{aligned}
\tag{13}
$$

решение примет вид:

$$
\theta_{kp}\left(\frac{a}{h}\right)^2\alpha=\frac{\text{æ}^*\left(\text{æ}_{22}\text{æ}_{23}-\frac{E^2}{G^2}\text{æ}_{23}^2\right)-\frac{E}{G}\text{æ}_{33}\text{æ}_{12}^2+\frac{2E^2}{G^2}\text{æ}_{12}\text{æ}_{23}\text{æ}_{13}}{\text{æ}^{**}\left(\text{æ}_{22}\text{æ}_{33}-\frac{E^2}{G^2}\text{æ}_{23}^2\right)}
\tag{14}
$$

Где:

$$
\begin{aligned}
&æ^* = 12(1-\nu^2)\pi^2\left(\frac{a}{b}\right)^2;\\
&æ^{**} = \pi^4\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left[2\nu+4\frac{G}{E}(1-\nu^2)\right]\left(\frac{a}{b}\right)^2+\right.\\
&\left.+24(1-\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right)^4\sum_{i=1}^{n} sin^2\frac{\pi xi}{a}\frac{E_i^p}{E}\frac{J_i^p}{ah^3}\right\};\\
&æ_{12} = \pi^3+\left[\nu+2(1-\nu^2)\frac{G}{E}\right]\pi^3\left(\frac{a}{b}\right)^2;\\
&æ_{13} = \pi^3\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left[\nu+2(1-\nu)^2\frac{G}{E}\right]\frac{a}{b}+\right.\\
&\left.+24(1-\nu)^2\left(\frac{a}{b}\right)^3\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi x_i}{a}\frac{E_i^p}{E}\ \frac{J_i^p}{ah^3}\right\};\\
&æ_{23} = \pi^3\frac{E}{G}\left[\nu+2(1-\nu^2)\frac{G}{E}\right]\frac{a}{b};\\
&æ_{22} = \pi^2\frac{E}{G}\left[1+(1-\nu^2)\frac{G}{E}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]+10(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2;\\
&æ_{33} = \frac{E}{G}\pi^2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+(1-\nu^2)\frac{G}{E}\right]+10(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2+\\
&+24(1-\nu^2)\pi^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{E}{G}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}\frac{a_i^p}{a}\frac{h_i^p}{h};
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Приводится количественный анализ влияния геометрических параметров на величины критических температур. Результаты можно видеть в таблицах. Значения критических температур указаны в кельвинах. Критические температуры при различном количестве ребер:

Таблица 1 — Значения критических температур при граничных условиях 10.

	без ребер	2 ребра	5 ребер
Сталь	0.96	1.18	1.4
Чугун белый	0,11	0,14	0,17
Медь прокатная	0,75	0,75	0,81

Таблица 2 — Значения критических температур при граничных условиях 11.

	без ребер	2 ребра	5 ребер
Сталь	2,54	5,80	10,05
Чугун белый	0,29	0,69	1,22
Медь прокатная	1,89	3,45	5,32

Значения критических температур при различной ширине пяти ребер (в сантиметрах):

Таблица 3 — Значения критических температур при граничных условиях (10).

	1 см.	2 см.	3 см.
Сталь	1.16	1.31	1.518
Чугун белый	0.13	0.15	0.18
Медь прокатная	0.67	0.75	0.86

Таблица 4 — Значения критических температур при граничных условиях (11).

	1 см.	2 см.	3 см.
Сталь	8.3	9.37	10.86
Чугун белый	1.008	1.14	1.32
Медь прокатная	4.46	4.99	5.72

Значения критических температур при различной высоте пяти ребер, и ширине в 1.5 (в сантиметрах):

Таблица 5 — Значения критических температур при граничных условиях (10).

	1 см.	2 см.	3 см.
Сталь	0.88	1.05	1.31
Чугун белый	0.11	0.13	0.16
Медь прокатная	0.53	0.62	0.76

Таблица 6 — Значения критических температур при граничных условиях (11).

	1 см.	2 см.	3 см.
Сталь	6.32	7.48	9.38
Чугун белый	0.77	0.91	1.14
Медь прокатная	3.49	4.06	4.99

Из этих значений следует, что добавление ребер жесткости значительно повышает величину критической температуры.

заключение

1. На основании модели Рейсснера получено выражение для силовых характеристик термоупругой системы "пластинка–ребра"в обобщенных углах поворота и функции прогиба.
2. С помощью метода Ритца определяется уравнение для нахождения критических температур ребристой пластины.
3. Получены значения критических температур для ребристой пластинки.
4. Проведем количественный анализ влияния геометрических характеристик подкрепляющих элементов на величину критической температуры.