Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математике

# Обратная задача Штурма-Лиувилля по двум спектрам

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Портновой Ольги Сергеевны

Научный руководитель

| | | |
|---|---|---|
| Доцент, к.ф.-м.н., доцент | _______________ | С. А.Бутерин |
| должность, уч.степень, уч.звание | подпись, дата | инициалы, фамилия |

Зав.кафедрой

| | | |
|---|---|---|
| Д.ф-м.н., профессор | _______________ | В.А.Юрко |
| должность, уч.степень, уч.звание | подпись, дата | инициалы, фамилия |

Саратов 2016

## Введение

В данной работе рассматривается обратная задача для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке

$$-y'' + q(x)y. \tag{1}$$

Обратные задачи спектрального анализа заключаются в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Интерес к этой тематике постоянно увеличивается благодаря появлению все новых приложений, и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Первые исследования по спектральной теории операторов вида (1) были выполнены Д. Бернулли, Даламбером, Эйлером, Лиувиллем и Штурмом в связи с решением уравнения, описывающего колебания струны. Интенсивное развитие спектральная теория для различных классов операторов получила в XX веке.

Были предложены различные постановки обратной задачи. Так В.А.Марченко доказал что дифференциальный оператор однозначно определяется заданием своих спектральных данных (т.е. собственных значений и весовых чисел). Г.Борг доказал аналогичную теорему при заданных двух спектрах, а А.Н.Тихонов получил теорему единственности решения обратной задачи по функции Вейля, полюсами которой являются собственные значения. Надо отметить, что все эти постановки обратной задачи являются эквивалентными. В нашей работе мы рассмотрим теорему Борга, однако приведем другой способ доказательства, основанный на операторе преобразования.

Данная работа состоит из четырех частей.

В первой части, дается понятие спектра для оператора Штурма-Лиувилля (1). А так же исследуются асимптотические и аналитические свойства собственных значений.

Во втором разделе доказывается, что система собственных функций является полной и образует ортогональный базис в пространстве $L_2$. Приводится теорема о разложении в равномерной норме. Исследуются также осцилляционные свойства собственных функций и доказывается, что $n$- я собственная функция имеет в точности $n$ нулей внутри интервала.

В третьей части работы вводится, так называемый, оператор преобразования, использующийся при доказательстве большого количества теорем в теории обратных задач.

В четвертой части формулируется и доказывается основной результат данной работы - теорема единственности восстановления оператора по двум спектрам.

## Основное содержание работы

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x), h, H)$:

$$\ell y = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1.1}$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda$ - спектральный параметр; $q(x), h$ и $H$ вещественны; $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Оператор $\ell$ называется *оператором Штурма-Лиувилля,* а функцию $q(x)$ назовем потенциалом.

Найдем ненулевые решения краевой задачи (1.1)-(1.2).

**Определение 1.1.** *Те значения параметра $\lambda$, при которых задача $L$ имеет нетривиальные решения называются собственными значениями, а сами эти решения называются собственными функциями. Множество собственных значений называется спектром $L$.*

Вначале исследуем свойства и асимптотику собственных значений и собственных функций.

Введем в рассмотрение следующие решения уравнения (1.1) $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$, $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ при начальных условиях

$$C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0, \quad S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1,$$

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad \psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H.$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle, \tag{1.4}$$

где

$$\langle y(x), z(x) \rangle = y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$$

- определитель Вронского (или вронскиан) для функций $y(x), z(x)$.

Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи $L$.

**Теорема 1.1.** *Нули $\{\lambda_n\}$ характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи $L$. Функции $\varphi(x, \lambda_n)$ и $\psi(x, \lambda_n)$ являются собственными функциями, и существует последовательность $\{\beta_n\}$ такая, что*

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta_n \neq 0. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx. \tag{1.7}$$

**Определение 1.2.** *Числа $\{\alpha_n\}$ называются весовыми числами, а числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ называются спектральными данными краевой задачи $L$.*

**Лемма 1.1.** *Справедливо соотношение*

$$\beta_n \alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n), \tag{1.8}$$

*где числа $\beta_n$ определяются формулой (1.6), и $\dot{\Delta}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.*

**Теорема 1.2.** *Собственные значения $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\varphi(x, \lambda_n)$, $\psi(x, \lambda_n)$ - вещественны. Все нули функции $\Delta(\lambda)$ являются простыми, т.е. $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(0, \pi)$.*

**Лемма 1.2.** *При $|\rho| \to \infty$ верны следующие асимптотические формулы*

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau| x)\right) = O(\exp(|\tau| x)), \\ \varphi'(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho x + O(\exp(|\tau| x)) = O(|\rho| \exp(|\tau| x)), \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(x,\lambda) = \cos\rho(\pi - x) + O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|(\pi - x))\right) = \\
&\qquad O(\exp(|\tau|(\pi - x))), \\
&\psi'(x,\lambda) = \rho\sin\rho(\pi - x) + O(\exp(|\tau|(\pi - x))) = \\
&\qquad O(|\rho|\exp(|\tau|(\pi - x)))
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

равномерно по $x \in [0, \pi]$. Здесь и в дальнейшем $\lambda = \rho^2,\ \tau = Im\,\rho$, а $o$ и $O$ - символы Ландау.

Основным результатом первой части выпускной квалификационной работы является следующие теоремы о существовании и асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций краевой задачи $L$, а так же аналитическом представлении характеристической функции.

**Теорема 1.3.** *Краевая задача $L$ имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$. При этом*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l_2, \tag{1.13}$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leq C, \tag{1.14}$$

*где*

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt.$$

**Теорема 1.4.** *Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле*

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{1.26}$$

Во втором разделе работы мы рассмотрим основные свойства собственных функций Покажем, что система собственных функций краевой задачи

Штурма-Лиувилля $L$ полна и образует ортогональный базис в $L_2(0,\pi)$. Затем приведем достаточные условия равномерной сходимости ряда по собственным функциям. Теоремы о полноте и о разложении играют важную роль при решении различных задач математической физики методом разделения переменных. Для доказательства этих теорем здесь используется метод контурного интеграла интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра.

**Теорема 2.1.** *(1) Система собственных функций* $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ *краевой задачи* $L$ *полна в* $L_2(0,\pi)$.

*(2) Пусть* $f(x),\ x\in[0,\pi]$ *– абсолютно непрерывная функция. Тогда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n),\quad a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt, \tag{2.1}$$

*причем ряд сходится равномерно на* $[0,\pi]$.

*(3) Для* $f(x)\in L_2(0,\pi)$ *ряд (1.2.1) сходится в* $L_2(0,\pi)$, *причем имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n|a_n|^2. \tag{2.2}$$

Существует несколько методов доказательства теоремы 2.1. В работе используется метод контурного интеграла, который играет важную роль в исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа для многих классов операторов.

Далее изучим вопрос осцилляции собственных функций.

**Теорема 2.2.** *Собственная функция* $\varphi(x,\lambda_n)$ *краевой задачи* $L$ *имеет ровно* $n$ *нулей в интервале* $0<x<\pi$.

Важную роль в теории обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля играют так называемые операторы преобразования. Они связывают решения двух различных уравнений Штурма-Лиувилля при всех $\lambda$. В третьей части работы вводятся операторы преобразования и изучим их свойства.

**Теорема 3.1.** *Для функции $C(x,\lambda)$ имеет место представление*

$$C(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x K(x,t)\cos\rho t\,dt, \quad \lambda = \rho^2, \tag{3.1}$$

*где $K(x,t)$ – вещественная непрерывная функция, причем*

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Аналогично можно получить операторы преобразования для решений $S(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ :

**Теорема 3.2.** *Для функций $S(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ имеют место представления*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt, \tag{3.10}$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x G(x,t)\cos\rho t\,dt, \tag{3.11}$$

*где $P(x,t)$ и $G(x,t)$ – вещественные непрерывные функции с той же гладкостью, что и функция $\int_0^x q(t)\,dt$, причем*

$$G(x,x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt. \tag{3.12}$$

$$P(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt. \tag{3.13}$$

Перейдем к основному результату выпускной квалификационной работы. Для этого, вначале, введем необходимые обозначения. Условимся, что наряду с $L$ рассматривается краевая задача $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче $L$, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$, а $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Рассмотрим следующую постановку обратной задачи: восстановить дифференциальный оператор по двум спектрам краевых задач с общим дифференциальным уравнением и одним общим краевым условием. Для определенности пусть общим является краевое условие в точке $x = 0$.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ – собственные значения краевых задач $L$ и $L_1$ соответственно, где $L_1$ определена следующим образом

$$\ell y = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y(\pi) = 0.$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

**Задача 4.1.** По заданным двум спектрам $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты $h$ и $H$ в краевых условиях.

Сформулируем теорему единственности решения задачи 4.1.

**Теорема 4.1.** *Если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \tilde{\mu}_n$, $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$. Таким образом, задание двух спектров $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.*

**Замечание 4.1.** Ясно, что полученный результат остается также верным и в случае, когда вместо $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ задаются два спектра $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda_n^0\}$ краевых задач $L$ и $L_0$, где $L_0$ определена следующим образом

$$\ell y = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$U(y) = y(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

т.е. остается верным для следующей обратной задачи.

**Задача 4.2.** По заданным двум спектрам $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты $h$ и $H$ в краевых условиях.

Теорема единственности для задачи 4.2 имеет следующий вид.

**Теорема 4.2.** *Если* $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\lambda_n^0 = \tilde{\lambda}_n^0$, $n \geq 0$, *то* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *п.в. на* $(0, \pi)$, $h = \tilde{h}$ *b* $H = \tilde{H}$. *Таким образом, задание двух спектров* $\{\lambda_n, \lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ *однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий..*

Отметим, что теорема 4.2 может быть сведена к теореме 4.1 заменой $x \to \pi - x$.

## Заключение

Таким образом в данной работе было введено понятие спектра для оператора Штурма-Лиувилля (1.1). Изучены его асимптотические и структурные свойства. Так исследованы свойства собственных функций.

Рассмотрены операторы преобразования и, с их помощью, доказана теорема единственности решения обратной задачи по двум спектрам.