Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Применение системы Хаара для решения задачи Коши

АВТОРЕФЕРАТ
БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета

Попова Алексея Юрьевича

Научный руководитель
Старший преподаватель С.И Поликарпов

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор. В.А. Юрко

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи науки и техники сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, что определяет ее актуальность. Существует достаточно методов численного решения ОДУ, например, такие как метод Эйлера или метод Рунге-Кутты. Данная работа посвящена нахождению численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка на отрезке [0,1] с использованием разложения функций в ряд по системы Хаара. Ранее, в других работах рассматривалось применение функций Хаара для решения ДУ и вариационных задач. Ранее с помощью системы Хаара строилось само решение дифференциального уравнения. В этом случаи приходилось вводить специальный оператор дифференцирования для кусочно-постоянных функций, что приводило к громоздким вычислениям.

Цель работы состоит в применении системы Хаара для нахождение численного решения задачи Коши. Сравнить полученные результаты с результатами полученные методом Рунге-Кутты. Сделать соответствующие выводы.

Задача данной работы: изучить соответствующий теоретический материал, разобрать на конкретном примере изученный материал, применить полученные знания для численного решения данной задачи. Сделать соответствующие выводы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников, приложений.

Во введении дается общая характеристика работы: актуальность, цель, задачи.

В первой главе дается определение классической ортонормированной системы – системы Хаара и описание ее основных свойств.

Во второй главе дается постановка задачи. Рассматривается численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке [0,1] использованием разложения функций в ряд по системы Хаара.

В заключении приводятся основные результаты проделанной работы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введение обосновывается актуальность исследования, ставятся цели и задачи.

В первой главе дается определение классической ортонормированной системы – системы Хаара и описание ее основных свойств.

Определение 1. Система Хаара - это система функций

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1],$$

в которой $\chi_1 \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n \leqslant 2^{k+1}, k = 0, 1, \ldots$, определяется так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \overline{\Delta_n} \\ 2^{k/2}, & \text{при } x \in \Delta_n^+ \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \Delta_n^- \end{cases} \tag{1}$$

Формулируются оценки коэффициентов и теоремы о сходимости рядов Фурье-Хаара

Теорема 1. Для произвольной функции $f(x) \in C(1,0)$ ее ряд Фурье-Хаара сходится к $f(x)$ равномерно на [0, 1]. При этом

$$\rho_C(f,N) := \|f - S_N(f)\|_C \leqslant 3\omega\left(\frac{1}{N}, f\right), \quad N \geqslant 1. \tag{2}$$

Теорема 2. Ряд Фурье-Хаара каждой функции $f \in L^1(0,1)$ сходится к $f(x)$ п.в. на (0, 1). При этом для мажоранты частных сумм ряда

$$S^*(f,x) := S^*_\chi(f,x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} |S_N(f,x)| \tag{3}$$

справедливы неравенства:

1. $m\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > y\} \leqslant \frac{C}{y}\|f\|_1$;
2. $\|f\|_p \leqslant \|S^*(f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, f \in L^p(0,1), 1 < p \leqslant \infty$.

Теорема 3. Для коэффициентов Фурье по системе Хаара каждой функции $f \in C(0,1), f \neq \mathbf{const}$, справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f)| \, n^{3/2} > 0.$$

Теорема 4. Для того чтобы ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{4}$$

сходился п.в. на множестве $E \subset (0,1), m(E) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x \in E$ была конечна сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x). \tag{5}$$

Теорема 5. Для безусловной сходимости п.в. на множестве $E \subset (0,1), m(E) > 0$, ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x \in E$, была конечна сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \chi_n(x)| \, .$$

Лемма 1. Для любого полинома вида

$$\sum_{n=M}^{N} a_n \chi_n(x), \;\; 1 < M < N,$$

найдется такая перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{N}$ чисел $M, M+1, \ldots, N$, что для любого $x \in [0,1]$

$$\max_{M \leqslant p \leqslant q \leqslant N} \left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x) \right| \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n=M}^{N} |a_n \chi_n(x)| \,.$$

Во второй главе дается постановка задачи. Рассматривается численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке [0,1] использованием разложения функций в ряд по системы Хаара. **Построение алгоритма для ОДУ первого порядка**.

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \\ y\,(0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0,1]$ – непрерывные функции. Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи (7), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n:

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k} \chi_k(x).$$

Такой полином является ступенчатой функцией

$$y_n'(x) = y_{n,k}, \quad k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1,$$

которая во внутренних точках разрыва равна полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 – своему пределу изнутри отрезка [0,1], т.е. $y_n'(0) = y_{n,0}, y_n'(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})\,/2$ при $k = 1, \ldots, 2^n - 1, y_n'(1) = y_{n,2^k-1}$.

Сразу заметим, что переход от набора $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ значений ступенчатой функции к набору $\{\hat{y}_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ ее коэффициентов Фурье-Хаара (и обратно) может быть осуществлен с использованием быстрого преобразования Хаара.

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \quad k2^{-n} \leqslant x \leqslant (k+1)2^{-n},$$

где $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$. Фиксируем набор промежуточных точек $y_n(x) = (k + \theta_{n,k})2^{-n}, 0 < \theta_{n,k} < 1, k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (7) на множестве точек $\{x_{n,k}(x)\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений

$$y_n'(x_{n,k}) + a(x_{n,k}) y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y_n'(x)$ и обозначив для краткости $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$ будем иметь

$$y_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n} \right) = b_{n,k}, \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1. \tag{8}$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (2.2) величины $\{y_{n,k}(x)\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно, если только $1 + a_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n} \neq 0$ для всех $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, что заведомо выполняется для достаточно больших n, а именно, при $2^n \geqslant \|a\| = \max_{x \in [0,1]} |a(x)|$.

Можно избежать произвола при выборе множества промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ полагая, например, $\theta_{n,k} = 1/2$. В таком случае каждая точка $x_{n,k}$ будет серединой отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$. Упростим рекуррентные соотношения (2.2) путем приведения их к следующему виду

$$z_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} \right) = b_{n,k}, \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1. \tag{9}$$

Из уравнения (9) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ по-прежнему определяются рекуррентно и при том однозначно для любого натурального числа n.

Пусть функции $z_n(x)$ и $z'_n(x)$ имеют тот же смысл, что и пара $y_n(x)$ и $y'_n(x)$ т.е. в представлении последних величины $y_{n,k}$ заменены на $z_{n,k}$. Именно, $z'_n(x) = z_{n,k}$, где $k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, k = 0, \dots, 2^n - 1$ и

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \quad k2^{-n} \leqslant x \leqslant (k+1)2^{-n}, \qquad (10)$$

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (9) по входным интерполяционным и начальным данным: $\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$, $\{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ и y_0.

Построение алгоритма для ОДУ второго порядка.

Рассмотрим задачу Коши на отрезке $[0, 1]$ следующего вида:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)\, y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad (11)$$

Запишем функции $p(x)$ и $f(x)$ в виде их разложения в ряд по системе Хаара:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h_k(x),$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h_k(x),$$

где $h_k(x)$ - функция Хаара, а p_k и f_k - соответствующие коэффициенты разложений.

Так же представим $y''(x)$ в виде разложения по системе Хаара

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x), \qquad (12)$$

здесь c_k - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Проинтегрируем равенство (12) от 0 до x на отрезке $[0,1]$

$$\int\limits_0^x y''(t)\,dt = y'(x) - y'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)\,,$$

где $\varphi_k(x)$- функции Фабера-Шаудера, задаваемые равенствами

$$\varphi_{2^n+j}(x) = \begin{cases} x - \frac{j}{2^n}, & x \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1/2}{2^n}\right] \\ \frac{j+1}{2^n} - x, & x \in \left[\frac{j+1/2}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] \\ 0, & x \notin \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] \end{cases}$$

Отсюда получаем выражение

$$y'(x) = y'(0) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)\,.$$

Еще раз проинтегрируем его от 0 до x на отрезке $[0,1]$, получим

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x)\,. \tag{13}$$

где $\psi_k(x)$ задается следующими равенствами

$$\psi_{2^n+j}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{jx}{2^n} + \frac{j^2}{2^{2n+1}}, & x \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1/2}{2^n}\right] \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x(j+1)}{2^n} - \frac{j}{2^{2n}} - \frac{j^2}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{2n+2}}, & x \in \left[\frac{j+1/2}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] \\ 0, & x \in \left[0, \frac{j}{2^n}\right] \\ \frac{1}{2^{2n+2}}, & x \in \left[\frac{j+1}{2^n}, 1\right] \end{cases}$$

Следовательно, функции $\psi_k(x)$ являются кусочно-квадратичными, и решение задачи Коши будем приближать с помощью квадратичных сплайнов.

Подставим полученные представления в уравнения (11), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k h_k(x) \left(y(0) + y'(0)x + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi_j(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h_k(x)\,.$$

Выберем некоторое $N = 2^n - 1$ и неперпишем последнее равенство следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{N} h_k(x) \left(c_k + p_k y(0) + p_k y'(0) x + p_k \sum_{j=0}^{N} c_j \psi_j(x) - f_k \right) = 0.$$

Рассмотрим последнюю сумму в точках $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, получим

$$\sum_{k=0}^{N} h_k(x_i) \left(c_k + p_k y(0) + p_k y'(0) x_i + p_k \sum_{j=0}^{N} c_j \psi_j(x_i) - f_k \right) = 0. \tag{14}$$

Таким образом, (14) - это система линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$ относительно неизвестных c_k. Коэффициенты системы задаются следующими равенствами

$$\begin{cases} a_{i,j} = h_j(x_i) + \psi_j(x_i) \sum\limits_{k=0}^{N} p_k h_k(x_i) \\ \\ b_i = \sum\limits_{k=0}^{N} f_k h_k(x_i) - \sum\limits_{k=0}^{N} p_k h_k(x_i)(y(0) + y'(0) x_i). \end{cases}$$

Решая систему (14) методом Гаусса, находим коэффициенты c_k и затем по формуле (13) находим решение задачи Коши $y(x)$.

Результаты численного эксперимента

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x+1} y = \exp(x)(x+1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Точное решение $y(x) = (\exp(x) - 1)(x + 1)$.

В таблице **??** приведено точное $Y(x)$, а так же погрешность решения, полученного методом Хаара $|Y(x) - H(x)|$ и методом Рунге-Кутта второго порядка $|Y(x) - RK(x)|$ для 22-х точек разбиения отрезка [0; 1].

Таблица 1

x	$Y(x)$	$\lvert Y(x) - H(x)\rvert$	$\lvert Y(x) - RK(x)\rvert$
0	0	0	0
0.045454	0.048617	0,00003	0,00003
0.090909	0.103821	0,00006	0,00007
0.136364	0.166021	0,00011	0.00011
0.181818	0.23565	0,00013	0.00015
0.227273	0.313166	0,00017	0.00019
0.272727	0.399053	0,00021	0.00023
0.318182	0.493825	0,00025	0.00027
0.363636	0.598024	0,00029	0.00031
0.409091	0.712223	0,00034	0.00035
0.454545	0.837029	0,00039	0.00039
0.5	0.973082	0,00044	0.00044
0.545455	1.12106	0,00047	0.00048
0.590909	1.28168	0,00051	0.00052
0.636364	1.4557	0,00056	0.00057
0.681818	1.64393	0,00060	0.00061
0.727273	1.8472	0,00063	0.00065
0.772727	2.06641	0,00068	0.00070
0.818182	2.3025	0,00072	0.00074
0.863636	2.55648	0,00075	0.00078
0.909091	2.8294	0,00079	0.00082
0.954545	3.12237	0,00083	0.00086

Таким образом максимальная погрешность для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге-Кутта R_{RK}

$$R_H = 0,00083 \quad R_{RK} = 0.00086$$

В данном случае погрешности методов Хаара и Рунге-Кутта практически идентичны.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши второго порядка:

$$\begin{cases} y'' + y - 2\cos(x) = (x+1)(x+2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Точное решение данной задачи принимает вид $y(x) = x(x+3) + (x-3)\sin(x)$.

В таблице **??** приведено точное, а так же погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге-Кутта второго порядка для 12-и точек разбиения отрезка [0; 1].

Таблица 2

x	$Y(x)$	$\|Y(x) - H(x)\|$	$\|Y(x) - RK(x)\|$
0	0	0	0
0.08333	0.01417	0	0.0001528
0.1667	0.05774	0	0.0003714
0.25	0.1321	0	0.0007575
0.3333	0.2386	0	0.001417
0.4167	0.3781	0	0.002459
0.5	0.5514	0	0.003992
0.5833	0.7592	0	0.006127
0.6667	1.002	0	0.008971
0.75	1.279	0	0.01263
0.8333	1.591	0	0.0172
0.9167	1.937	0	0.02277

Рассмотрение данной задачи показало, что, если решением задачи Коши является квадратичная функция, то алгоритм дает точное решение уже при разбиении отрезка четырьмя точками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрен метод решения задачи Коши с использованием разложения функции в ряд по системе Хаара. По результатам исследования написана программа и проведен численный эксперимент. Который показал следующие: для задачи Коши ОДУ 1-го порядка погрешность метода практически идентична погрешности метода Рунге-Кутта второго порядка, но в некоторых случаях погрешность значительно меньше. Решение задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка показало, что, если решением задачи Коши является квадратичная функция, то алгоритм дает точное решение уже при разбиении отрезка четырьмя точками.

Хотелось бы отметить, что для изучения данного алгоритма использовались модельные задачи с известными точными решениями. Следовательно можно предположить, что для нахождения приближенного решения, данный алгоритм можно перенести на более сложные задачи, точное решение которых трудно или вовсе невозможно найти.